「ダヴィンチコード」に登場する数学

ベストセラー「ダヴィンチコード」の中に「フィボナッチ数列」と「黄金分割比」と「五芒星」の話が出てきます． ここでは, この 3 つの話について, どのようなものなのか, どういう関連があるのかをお話しましょう

ではまずフィボナッチ数列 (Fibonacci sequence) についてです.

フィボナッチ数列について

はじめに, 次のような問題について考えてみましょう.

問題 ここに子ウサギが 1 つがいいます. 子ウサギは 1 か月経つと親ウサギになり, 1 つがいの親ウサギは 1 か月経つと 1 つがいの子ウサギを産みます. その後は 1 か月経つごとに 1 つがいの子ウサギを産んでゆきます. 産まれた子ウサギたちも同じように 1 か月経つと親ウサギになり, また 1 か月たつと子ウサギを産みます. ウサギはすべて死なないとして, 1 年後 2 年後には (親も子も含めて) 何つがいのウサギがいるでしょうか?

始めのウサギの数 (数とは何つがいいるかということです. 何匹, 何羽ではありません) を a_1, 1 か月後のウサギの数を a_2, 2 か月後のウサギの数を a_3, 以下 $a_4, a_5, \cdots$ とします. すると, 始めは子ウサギが 1 つがいなので $a_1 = 1$, 1 か月後は子ウサギが親ウサギになるだけなので $a_2 = 1$, 2 か月後は親ウサギが子ウサギを産むので $a_3 = 1 + 1 = 2$, 以下 $a_4 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = 3 + 2 = 5 \cdots$ となります. 表にすると

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

となります.

このように, ある規則にしたがって並んでいる数字の列を**数列 (sequence)** といいます. 上の数列は発見した数学者の名前をとってフィボナッチ数列といいます.

本当は規則が無くデタラメに並んでいてもいいのですが, 数学的な意味があまり無いので, 規則のあるものだけを考えます. 数列を構成する 1 つ 1 つの数をその数列の**項 (term)** といい, 特に最初の項を**初項 (first term)** といいます. 以下, 2 番目の項を第 2 項, 3 番目の項を第 3 項, $\cdots$, n 番目の項を第 n 項または**一般項 (general term)** といいます.

では, これから初歩的な数列である等比数列について話します. ご存知の方は次のセクションを飛ばしてください.

等比数列

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162, \cdots$$

のようにある項とその直前の項との比 (ある項 ÷ 直前の項) がすべて等しい数列を**等比数列 (geometrical progression)** といいます．この比をすべてに共通の比ということで**公比 (common ratio)** といいます. 上の数列の場合,

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = 3$$

で公比 3 です．この数列では初項 2 に公比 3 を次々に掛けていけば順番にすべての項が得られます.

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 6 = 2 \times 3, \quad a_3 = 18 = 6 \times 3 = 2 \times 3^2, \quad a_4 = 54 = 18 \times 3 = 2 \times 3^3,$$
$$a_5 = 162 = 54 \times 3 = 2 \times 3^4, \quad \cdots, \quad a_n = 2 \times 3^{n-1}, \cdots$$

一般に初項 a 公比 r の等比数列の一般項は $a_n = ar^{n-1}$ です.

次に等比数列の和について考えてみましょう. 上の数列の場合

$$S_5 = 2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

です. この式の両辺に公比 3 を掛けると

$$3S_5 = 6 + 18 + 54 + 162 + 486$$

始めの式を引くと

$$3S_5 - S_5 = (6 + 18 + 54 + 162 + 486) - (2 + 6 + 18 + 54 + 162) = 486 - 2$$

よって $2S_5 = 484 \therefore S_5 = 242$

一般に初項 a 公比 r の等差数列の和では上の 3 番目の式は

$$rS_n - S_n = ra_n - a_1$$

$a_1 = a$, $a_n = ar^{n-1}$ だから

$$rS_n - S_n = ar^n - a \quad \therefore (r-1)S_n = a(r^n - 1)$$

よって $r \neq 1$ として

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

となります.

もし $r = 1$ なら数列の各項はすべて等しくなり, $S_n = a + a + \cdots + a = na$ となります.

フィボナッチ数列と漸化式

話をフィボナッチ数列にもどしましょう．フィボナッチ数列はどんな規則でできているのでしょうか? ウサギの数 (つがいの数) は今いる親ウサギが新たに産んだ子ウサギの数だけ増えます．では親ウサギの数は? 1 か月前のウサギはすべて (親も子も) 親ウサギになります．つまり今いる親ウサギの数は 1 か月前のウサギの総数です．

$a_n =$ ウサギの総数 (親 + 子)$\to$1 か月後, すべて親ウサギ

$\to a_{n+1} = a_n($ 親ウサギ $)+$ 新しく産まれた子ウサギ $\to$1 か月後, 親ウサギが子ウサギを産む

$\to a_{n+2} = a_{n+1}($ 親ウサギ $) + a_n($ 新しく産まれた子ウサギ$)$

つまりフィボナッチ数列は

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{1}$$

という性質をもっています．逆にいうとこの式に従って a_3 以降の項を計算することができます．

$n = 1$ のとき $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$n = 2$ のとき $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$n = 3$ のとき $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$\cdots$

このように直前の項から次の項を計算できる式を**漸化式**といいます．特に上の場合は連続する 3 つの項の式になっているので **3 項漸化式**といいます．3 項漸化式はフィボナッチ数列の例で判るように初項 a_1, 第 2 項 a_2 を与えれば数列が唯一つに定まります (計算できます)．例えばフィボナッチ数列は

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{2}$$

で定まります．

ここで, 3 項漸化式を満たす数列のうちで, 等比数列を考えてみましょう．等比数列の一般項は $a_n = ar^{n-1}$ ですから, $a_{n+1} = ar^n$, $a_{n+2} = ar^{n+1}$ です．フィボナッチ数列の漸化式を例にとると (1) より $ar^{n+1} = ar^n + ar^{n-1}$．一般に $a, r \neq 0$ だから両辺を ar^{n-1} で割って

$$r^2 = r + 1. \therefore r^2 - r - 1 = 0$$

この 2 次方程式を解の公式で解くと $r = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. よって (1) を満たす等比数列は

$$a_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ または } a_n = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(1) を満たす数列の和は再び (1) を満たすので

$$a_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

も (1) を満たします．これに (2) の条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ を考え合わせると

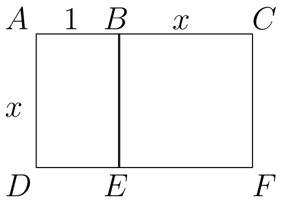
$$\begin{cases} a_1 = a + b = 1 \\ a_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}b = 1 \end{cases} \tag{3}$$

この連立方程式を解くと $a = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. ゆえにフィボナッチ数列の一般項は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

となります. このように一般に 3 項漸化式は漸化式を満たす等比数列を考えて, その公比の 2 次方程式を解き, 2 種類の等比数列を組み合わせて, 初項と第 2 項の条件からそれぞれの初項を決定して求めることができます.

黄金分割比について

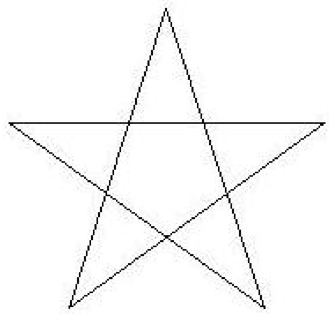


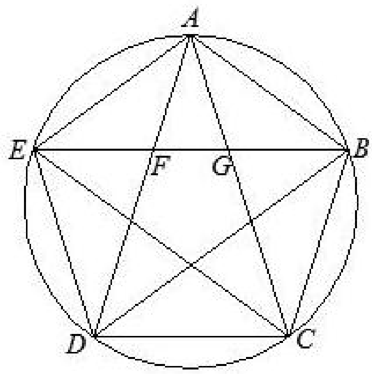
四角形 $BCFE$ は正方形で四角形 $ABED$ は長方形で, 長方形 $ABED$ と長方形 $CFDA$ は相似になるようにします. このとき, 長方形の 2 辺の比はどうなるでしょう. $AB : AD = 1 : x$ とすると $AD : AC = x : (1+x)$ となり, これらが等しいので $1 : x = x : (1+x)$.
よって

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} \quad \therefore 1 + x = x^2 \quad \therefore x^2 - x - 1 = 0.$$

この二次方程式はフィボナッチ数列に現れた r の二次方程式と同じなので, 解の公式より $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. この場合 $x > 1$ なので $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. x 自身が 1 に対する比と考えられるのですが, この比 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} (= 1.618\cdots)$ を黄金分割比といいます. 黄金分割比はダビンチコードでも書かれているように自然界にも多く現れ, そのためか, 美術, 建築でも, いろいろな場合に均整のとれた理想の分割比として用いられています.

五芒星 (pentagram) について





左上図のような形を五芒星 (pentagram) といいます. 日本では「陰陽師」で有名になった安倍晴明にちなんで晴明判とも呼ばれ, 古くから魔除けのシンボルとして使われたようです. 六芒星 (ユダヤのダビデの星) と並んで, 世界のいろいろな地域でも, よく使われてきました. 左下図のように正五角形の対角線を引くと五芒星の形が現れます. この図では説明のため, 正五角形の外接円も書いてあります. 正五角形の 5 つの内角の和は三角形 3 つ分なので $180^\circ \times 3 = 540^\circ$. よって 1 つの内角は $540^\circ \div 5 = 108^\circ$. 例えば左下図の

$$\angle EAB = 108^\circ$$

です. 円周を 5 等分したものの一つなので, 弧 $BC =$ 弧 $CD =$ 弧 DE. 同じ長さの弧に対する円周角は等しいので $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$. ゆえに

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = 108^\circ \div 3 = 36^\circ.$$

$\triangle AFG$ と $\triangle ADC$ は相似な二等辺三角形です (説明は略します). これらの二等辺三角形の低角は $(180^\circ - \angle DAC) \div 2 = (180^\circ - 36^\circ) \div 2 = 72^\circ$ です. $\angle EAC = 36^\circ \times 2 = 72^\circ$ だから $\angle EAG = \angle EGA = 72^\circ$ となり, $\triangle EGA$ も上記の二等辺三角形と相似になります. このように五芒星と正五角形は多くの相似な二等辺三角形からできています.

これらの二等辺三角形の 2 つの等辺と底辺の比はどうなっているでしょう？ $FG = 1$, $AG = AF(= EF) = x$ とすると $EG = EF + FG = 1 + x$. 相似比より $FG : AF = GA : EG$ だから $1 : x = x : 1 + x$. これは黄金分割比と同じで $x^2 - x - 1 = 0$. ゆえに $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 即ち

$$FG : AF = GA : EG = DC : AD = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となるのです.