第 1 章

基礎解析

1　式の計算

1. 1　次の有理関数を部分分数に分解せよ.

(1) $\dfrac{4(x+2)}{(x+1)^2(x+3)}$ (60　都立大)

(2) $\dfrac{4x^2}{x^4-1}$ (62　都立大)

(3) $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ (62　都立大)

1. 2　$\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+7x}{y}=\dfrac{x-y}{z}$ であるとき, この等式の値を求めよ. (59　図情大)

1. 3　$a,\, b,\, c$ は与えられた定数とする．次の恒等式

$$x^4+3x^3+ax^2+bx+c=\{(x+\lambda_1)x+\lambda_2\}\{(x+\lambda_1)x+\lambda_3\}+\lambda_4$$

が成り立っている．このとき, $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4$ を $a,\, b,\, c$ を用いて表せ. (60　千葉大)

1. 4　関数 $f(x)$ を $x-\alpha$ で割ると余りが m であった．また, $f(x)$ を $x^2-\beta$ で割ると余りが $px+q$ であった．$f(x)$ を $(x-\alpha)(x^2-\beta)$ で割ると余りは幾らか. (61　東大)

1. 5　底面の半径 r, 高さ h の直円錐に内接する球の半径を求めよ. $N-2$

2　方程式

2. 1　方程式 $x^4-14x^3+74x^2-182x+169=0$ の 2 根の積が他の 2 根の積に等しいことを知ってこれを解け.
(59　都立大)

2. 2　$x^3=1,\, ax^2+bx+c=0$ ならば, $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ であることを示せ. (59　図情大)

2. 3　方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の 3 根を $\alpha,\, \beta,\, \gamma$ とするとき, 次の 3 数を解とする方程式を作れ.

(1) $\alpha^2,\, \beta^2,\, \gamma^2$　(2) $\alpha\beta,\, \beta\gamma,\, \gamma\alpha$ (61　都立大)

2. 4　次の連立方程式を解け. (62　千葉大)

$$\begin{cases} x-2y+3z &= 2 \\ 2x-3y+4z &= 3 \\ 3x-8y+13z &= 8 \end{cases}$$

2. 5　$x^3+px^2+qx+r=0$　($p,\, q,\, r$ は整数) の解を $\alpha,\, \beta,\, \gamma$ とすれば,

$$a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n \ (n=1,2,3,\cdots)$$

とおくとき, $\{a_n\}$ の各項がすべて整数であることを証明せよ. (63　京大)

2. 6　$z=3$ の 3 乗根を求めよ. (2　都立科技大)

3　三角関数, 対数関数

3. 1　$\cos\theta = x$ のとき, $\cos 4\theta$ を x の多項式で表せ.　(46　東北大)

3. 2　方程式 $\sin 3x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ を解け.　(52　千葉大)

3. 3　$\alpha + \beta = \gamma,\ 0 \leq |\gamma| \leq \pi$ で γ を一定値として, α, β を変化させるとき, $\sin\alpha + \sin\beta$ の最大値を求めよ. またこのときの α, β の値を示せ.　(55　東北大)

3. 4　$\cos\left(x + \dfrac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(x + \dfrac{1}{4}\pi\right)$ を $A\cos x + B\sin x$ の形で表せ.　(62　九州大)

3. 5　$25x^2 - kx + 12 = 0$ という方程式がある. この方程式の 2 つの解が $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ で表されるとする.
(1) k を求めよ.　(2) $tan2\theta$ を求めよ.　(3) $\tan\theta$ を求めよ.　(62　東北大)

3. 6　$3\sin x + 4\cos x = a\cos(x - \phi)$ としたとき, a の値および $\tan\phi$ を求めよ.　$T - 63$

3. 7　a, b は正の数で $a^a < b < 1$ とする. 以下の問に答えよ.
(1) $a < 1$ を示せ.
(2) $\log_a b < 1$ を示せ.
(3) $\log_a b$ と $\log_a(\log_a b)$ の大小を比較せよ.　(2　名大)

4　領域

4. 1　$0 \leqq x \leqq y,\ 0 \leqq y \leqq 2$ の範囲の領域をグラフに示せ.　$N - 63$

4. 2　$y \geqq -2,\ x \geqq 4y + y^2,\ x \leqq y + 4$ の領域を示し, この領域内での $f(x, y) = 2y - x$ の最大値, 最小値を求めよ.　(2　阪大工)

5　場合の数

5. 1　1 から 100 までの自然数のうち
(1) 2 の倍数の数を求めよ.
(2) 2 と 3 の倍数の数を求めよ.
(3) $2, 3, 5$ の倍数でない数は幾つあるか.　(49　東北大)

5. 2　7 個の数字 $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4$ を 1 列に並べるのに奇数は奇数番目にあるようにするとき, 何通りできるか.(56　北大)

5. 3　$a, a, a, b, b, c, c, d, e, f$ の 10 文字より 4 個を取り出して作る順列の数を求めよ.　(59　都立大)

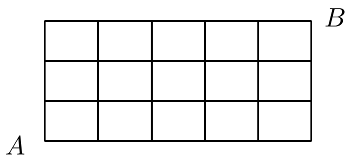
5. 4　街道路が長方形状に横の方向に $n + 1$, 縦の方向に $m + 1$ 本ある. 左下を点 $A(0, 0)$ 右上を点 $B(m, n)$ がある. 点 A より最短路を通って点 B へ行くものとする. また $f(1, 1) = 2, f(2, 1) = f(1, 2) = 3, f(2, 2) = 6, \cdots\cdots$ のようにするとき,
(1) $f(7, 7)$ を求めよ.
(2) $M(i, j)$ を通り $B(m, n)$ への最短路の数を f を用いて表せ. $(0 \leqq i \leqq m, 0 \leqq j \leqq n)$
(3) $M(i, j)$ もしくは $N(k, l)$ を通り, $B(m, n)$ への最短路の数を f を用いて表せ. ただし, $0 \leqq i \leqq k \leqq m$, $0 \leqq j \leqq l \leqq n$ とする.　(60　東大)

5. 5　1 桁の 2 進数を 1 ビットという. 2 ビットで表される 4 つの状態を書け. 3 ビット, 4 ビット, $\cdots\cdots$, 10 ビットでは, 何通りの状態を表現できるか. また, 1 から 10 までの数字を表現するには何ビット以上必要か. さらに A から Z までの文字についてはどうか.　(59　千葉大)

5. 6　いま 10 人の人たちが A, B, C の 3 台の車に乗る方法は何通りあるか.　(63　宮崎大)

5. 7　箱の中に $2n$ 個のボールが入っている. その中に n 個の白のボールが入っており, 残りのボールはどの二つも色の違う別々のボールが入っている. $2n$ 個のうち n 個を選ぶ組み合わせは何通りあるか.　(1　阪大基礎)

5. 8　A から B へ行く最短距離の道筋は何種類あるか.　$T - 2$



6　二項定理

6. 1　n を自然数として, 次の各式を x の多項式で表せ.

(1) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} {}_nC_m x^m (1-x)^{n-m}$

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n} {}_nC_m x^m (1-x)^{n-m}$

(3) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{m^2}{n^2} {}_nC_m x^m (1-x)^{n-m}$

ただし, ${}_nC_m (m=0,1,2,\cdots,n)$ は $(a+b)^n$ を展開したときの $a^m b^{n-m}$ の係数である.　(53　東北大)

6. 2　二項係数 ${}_nC_m$ は異なる n 個のものから k 個を取る組み合わせの数に等しい. n を正整数として, 次の問に答えよ.

(1) 次の等式を証明せよ.

(a) ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$　　$(k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$

(b) ${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1}$　　$(k=1,2,\cdots\cdots,n)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_nC_k = 0$

(2) 次の和を求めよ.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_{2n}C_k$　　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_{2n+1}C_k$　(58　東北大)

6. 3　$(2x^3+3x^{-2})^5$ の展開式における定数項の係数を求めよ.　(61　千葉大)

6. 4　$(1+x)^{12}$ の展開式において, x^{10} の係数を求めよ.　$T-63$