第 2 章

解析幾何

1　平面図形

1. 1　三角形 ABC の外接円の周上の一点 P から, この三角形の各辺またはその延長上におろした垂線の足 (交点)L, M および N は一直線上にあることを証明せよ.　(57　図情大)

1. 2 (1) 中心の座標が $(2, 4)$ で y 軸に接するような円の方程式を求めよ.
(2) 傾きが 1 でこの円に接するような直線の方程式を求めよ.
(3) 原点 O とこの円周上の点との最短距離および最長となる点の座標を求めよ.　(58　都立大)

1. 3　平面上の点 (x, y) に点 (x'', y'') を対応させる規則が, 次の (I), (II) によって与えられている.
(I) $x' = x + y, y' = 3x + 2y$ とする.
(II) 点 (x', y') を原点のまわりに, 反時計方向に $45°$ 回転して得られる点を (x'', y'') とする.
この規則によって直線 $y = ax + b$ の点がすべてこの直線上に移されるとき, a, b の値を求めよ.　$T - 59$

1. 4　次式で与えられる xy 平面上の領域の概形を示し, その面積を求めよ.

$$(|x| - a)^2 + (|y| - a)^2 \leqq b^2$$

ただし, a, b は正の定数とする.　$T - 59$

1. 5　2 次曲線 $x^2 + 2axy + y^2 = 1$ が閉曲線であるための, 定数 a のとるべき値の範囲を求めよ.　(60　図情大)

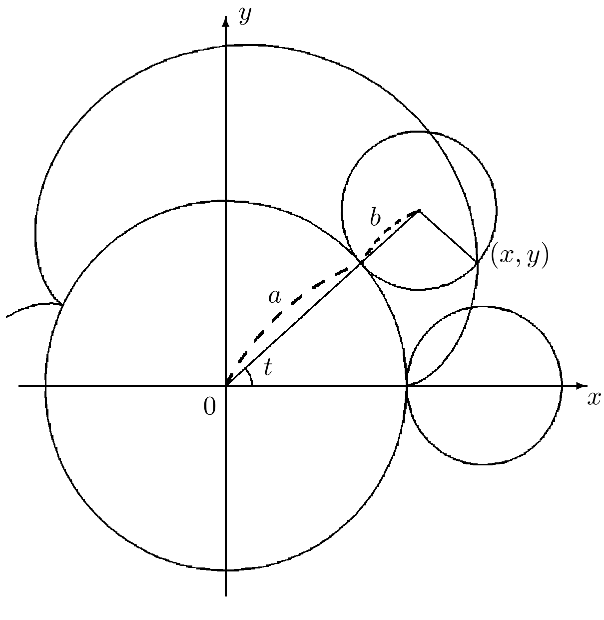
1. 6　方程式 $y^2 + 4x - 2y = 0$ を標準形に直し, その図形を描け.　(60　北大)

1. 7　3 点 $S(s, s^2), T(t, t^2), U(u, u^2)$ を通る円の中心の座標を求めよ.　(60　東北大)

1. 8　方程式 $2x^2 - 3xy + \lambda y^2 + 5y + \mu = 0$ が xy 平面上の直交する 2 直線を表すように λ, μ を定め, この 2 直線の方程式を求めよ.　(62　都立大)

1. 9　直線 $2x + y = 0$ は, 直交座標軸を時計方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転移動させると, どのように変わるか.　(1　佐大)

1. 10　次の図のように原点を中心とする半径 a の円に, 半径 b の円が外接しながらすべることなく転がるとき, 動く円の周上に固定した点で, はじめに x 軸上にあった点の描く曲線の方程式を求めよ.　(3　福井大)



2　直線 · 平面

2. 1　(イ) 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ との距離を求めよ.
(ロ) 平面 $x + 2y + 3z = 1$ に関する原点の対称点の座標を求めよ.　(51　金沢大)

2. 2　点 $(1, 1, 2)$ を通りベクトル $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ に垂直な平面の方程式を求めよ.　(55　山口大)

2. 3　点 $(3, 4, 5)$ と直線 $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ を含む平面の方程式を求めよ.　(55　群馬大)

2. 4　原点 O から平面 π へ下ろした垂線の足を H とする. また, OH の方向余弦を (l, m, n) とするとき, 平面 π の方程式は $lx + my + nz = p$ で与えられることを証明せよ. ただし, 原点 O から平面 π までの距離を p とする.
(55　東大)

2. 5　二つの平面 $x + y + z = 1, y - 2z = 2$ の交線 (直線) のベクトルを求めよ.　(57　広島大)

2. 6　$\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} + \dfrac{z}{\gamma} = 1$ と 3 つの座標平面とで囲まれた部分の体積を求めよ.　(61　広島大)

2. 7　$x + 2y + 3z = 6$ と座標平面上にできる 3 直線の囲む三角形の面積を求めよ.　(63　横浜国大)

2. 8　直線 $l : x - 1 = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ と平面 $\pi : x + y + z = 3$ に対して, 次の問に答えよ.
(1) l と π の交点 P_0 の座標を求めよ.
(2) π の単位法線ベクトルを求めよ.
(3) l 上の点 $P_1(1, 2, 3)$ から π 上に下ろした垂線と π との交点 P_0' の座標を求めよ.
(4) P_0 と P_0' の 2 点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトルを求めよ.　$T-63$

2. 9　$\dfrac{x-a}{u} = \dfrac{y-b}{v} = \dfrac{z-c}{w}$ と yz 座標平面との交点を求めよ.　$N-1$

2. 10　3 点 $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ を通る平面 α の方程式を求め, その図を描け. さらに点 $(3, 4, 5)$ からその平面 α への距離を求めよ.　(1　名大)

2. 11　$\dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{y-y_0}{2} = \dfrac{z-z_0}{3}$ を含む $x + y - z = 0$ に平行な平面の方程式を求めよ.　(2　都立大)

3　球

3. 1　空間における直線 $g : x - 1 = 2y = z$ と直交し, 点 $(1, 2, 3)$ を通る平面を α とする.
(1) 平面 α の方程式を求めよ.
(2) 点 (a, b, c) と平面 α との距離を求めよ.
(3) 平面 α と $x = 0, y = 0, z = 0$ の各平面で囲まれる部分 Q に入りうる最大の球の半径を求めよ.　(61　九州大)

3. 2　$x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 上の点 $(1, 2, 3)$ における接平面の方程式を求めよ.　(63　横浜国大)

4　空間曲線

4. 1　t をパラメータとする次の曲線の法平面は原点で交わることを証明せよ.
$x = a\sin^2 t, y = a\sin t\cos t, z = a\cos t$　(55　埼玉大)

5　2 次曲面

5. 1　2 次曲面 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$ を平面 $\sqrt{2}x + 5z = 0$ で切るとき, 切り口が円になることを示し, その面積を求めよ.

5. 2　次式で表される有心 2 次曲線がある.
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \qquad (a)$$
(1) 曲面 (a) と点 $P(x_1, y_1, z_1)$ において接する接平面の方程式を書け.
(2) この接平面の単位法線ベクトルおよび原点からの距離を求めよ.　(54　北大)

5. 3　曲面 $z^2 = 4x^2 + y^2$ が平面 $ax + z = 1$ 上で交わるときの曲線を S とし, 曲線 S を xy 平面に正投影した曲線を T とするとき, 次の問に答えよ.

(1) 曲線 T の方程式を求めよ.

(2) 曲線 T が円となるような a の値を求めよ.

(3) 曲線 S が円となるような a の値を求めよ. $N-63$

5. 4　点 $(0,-2,2)$ から曲面 $x^2+2y^2+4z^2-8z=0$ に引いた接線が xy 平面上に描く図形の式を求めよ. (1　金沢大)