第 3 章

線形代数

1 ベクトル

1. 1　n 次のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の関数 $\phi(t) = \left|\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}\right|$ の最大値, 最小値を求めよ.　(52　信州大)

1. 2　通常の座標系 $O - xyz$ が定義されている空間で, 次の 3 個のベクトルを考える.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

空間の任意のベクトル

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を $\overrightarrow{x} = p\overrightarrow{a} + q\,\overrightarrow{b} + r\overrightarrow{c}$ と表すとき, 係数 p, q, r は x, y, z からどのように求められるか. その式を書け.　$N - 58$

1. 3　$\overrightarrow{a} = (-1, 2), \overrightarrow{b} = (2t, 3), \overrightarrow{c} = (1, 3)$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) (x_0, y_0) を通り, $\overrightarrow{c}$ に直角に交わる直線の方程式を求めよ.

(2) $k\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{c}$ と直行するときの k と t の関係を導け.

(3) $k\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b}$ の大きさが 5 であるとき, k と t の関係を導け.

(4) (2)(3) を満足する k, t を求めよ.　(62　横浜国大)

1. 4　ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の大きさが等しいとき, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ は直行することを示せ.　$T - 62$

1. 5　2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j}, \overrightarrow{b} = 3\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ が直行するときの x の値を求めよ.　$T - 1$

1. 6　2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の大きさをそれぞれ A, B とするとき, $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})^2 + (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2$ の値を求めよ. ただし, $\overrightarrow{c}^2$ は $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c}$ を意味する.　$T - 1$

2 一次結合

2. 1　ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が線形独立 (一次独立) であるならば,

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}$$

も線形独立であることを証明せよ.　(52　慶応)

2. 2　3 つのベクトル ${}^t\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3), {}^t\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3), {}^t\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3)$ が 1 次従属であるための必要十分条件を求めよ.　(56　理科大 (II) 数)

2. 3　$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & \sqrt{2}b & c \\ a & -\sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & \sqrt{2}c & c \end{pmatrix}$ を 4 次正方行列とし, 単位基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $A\overrightarrow{e_1}, A\overrightarrow{e_2}, A\overrightarrow{e_3}, A\overrightarrow{e_4}$ が一次独立であるときの a, b, c の関係を求めよ.

(2) $\left|A\overrightarrow{x}\right| = \left|\overrightarrow{x}\right|$ であるときの a, b, c の値を求め, A を求めよ. (57　山梨大)

2. 4　$a_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \lambda \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$ が一次従属であるときの λ を求めよ. (57　熊本大)

2. 5　次の 3 ベクトルが一次独立であるような実数 λ を求めよ. (59　宮崎大)

$(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$

2. 6　次の 4 つの 4 次のベクトルは線形独立 (1 次独立) か否か. 理由をつけて答えよ. (60　千葉大)

${}^t(1\ 0\ 0\ 1), {}^t(1\ 0\ 0\ 0), {}^t(0\ 1\ 0\ 0), {}^t(0\ 0\ 1\ 0)$

2. 7　$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{a_n}$ が一次独立ならば, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \cdots\cdots + \overrightarrow{a_n}$ も一次独立になることを証明せよ.
(60　熊本大)

2. 8　次のベクトルの組が一次独立であるか, 一次従属であるかを判定し, その理由を述べよ. (61　広島大)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. 9　次のベクトルは一次独立か. (61　熊本大)

${}^t(1\ 1\ 1\ 0), {}^t(1\ 0\ 1\ 1), {}^t(1\ 1\ 0\ 1), {}^t(1\ 1\ 1\ 0)$

2. 10　ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$ が一次従属であるときの x の値を求めよ. (62　熊本大)

2. 11　$xz > y^2$ であるとき, 次のベクトルは 1 次独立か. (63　熊本大)

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}, \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}, \overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$$

2. 12　R^3 において, $\overrightarrow{e_1} = {}^t(1\ 0\ 0), \overrightarrow{e_2} = {}^t(0\ 1\ 0), \overrightarrow{e_3} = {}^t(0\ 0\ 1)$ とする.

(1) $\overrightarrow{a} = {}^t(0\ 1\ 1), \overrightarrow{b} = {}^t(1\ 0\ 1), \overrightarrow{c} = {}^t(1\ 1\ x)$ が 1 次従属であるための条件を求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が 1 次独立のとき, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ をそれぞれ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ に写す 1 次変換が存在することを示せ.

(3) $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が 1 次従属のとき, (2) のような 1 次変換は存在しないことを示せ. (63　大阪府大)

2. 13　3 つのベクトル $(a, 1, 2), (2, 1, 3), (a, 0, 1)$ がある. これらが 1 次独立でないための a の値を求めよ. また, $a = 2$ のとき, これらのベクトルを含む平面の方程式を求めよ.

3　ベクトルの応用

3. 1　ベクトル $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S は

$$S = \sqrt{\overrightarrow{A}^2 \overrightarrow{B}^2 - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})^2}$$

で与えられることを示せ.

ベクトル $\overrightarrow{A}$ の成分を $(ap + b, cp + 2a^2, a^3p - 1)$, ベクトル $\overrightarrow{B}$ の成分を $(ap - b, a^2p + a, a^{-1}p + a^3)$ とし, p が任意の値をとるとき, ベクトル $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ が直交する a, b, c の値を求めよ. ただし, $a > 0$ とする. (53　埼玉大)

3. 2 (1) $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ のベクトルの長さを求めよ.

(2) $\overrightarrow{A}$ と同じ向きの単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めよ.

(3) $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ のとき, $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ のなす角を求めよ.

(4) $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ のつくる直線を表すベクトル $\overrightarrow{C}$ を求めよ. (55　都立大)

3. 3　xy 平面上に原点 $O(0,0)$ と他の 3 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ が与えられているとき, 次の問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角が θ であるとき, $\cos\theta$ の値を x_1, y_1, x_2, y_2 で表せ.

(2) $\triangle OAB$ の面積を x_1, y_1, x_2, y_2 で表せ.

(3) $\triangle OAC$ の面積を $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ で表せ.

3. 4　平面 π はベクトル $\overrightarrow{A} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ と直交している. 平面 π から離れた点 $P(x, y, z)$ をとり, π 上に点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ をとる. また, ベクトル $\overrightarrow{A}$ と直交するベクトル $\overrightarrow{P_0P_1}$ をつくる点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ を π 上にとる.

(1) $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{P_0P_1}$ の直交条件を式で示せ.

(2) $\overrightarrow{A}$ と同じ向きの単位ベクトル $\overrightarrow{n_A}$ を作れ.

(3) $\overrightarrow{n_A}$ と $\overrightarrow{PP_0}$ との内積を求めよ.

(4) $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}, P_0(2, 3, 4)$ として平面 π の方程式を求め, π と原点との距離 d を求めよ. 平面 π が x 軸, y 軸, z 軸と交わる点 P_x, P_y, P_z を求めよ. (58　都立大)

3. 5　三角形 OAB において $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ とする. $\angle AOB$ の二等分線が AB と交わる点を C とする. 一般に $\overrightarrow{v}$ の大きさを $\left|\overrightarrow{v}\right|$ で表す.

(1) OC 上で長さ 1 のベクトルを求めよ.

(2) AB 上で A からの長さ x の点を P とする. $\overrightarrow{OP}$ を求めよ.

(3) $\overrightarrow{OC}$ を求めよ. (59　東北大)

3. 6　m, n を $0 < m < 1, 0 < n < 1$ である 2 つの実数とする. 三角形 ABC において辺 AB 上に点 L が, 辺 AC 上に点 M があり, $AB : AL = 1 : m, AC : AM = 1 : n$ が成り立っているとする. 線分 BM と線分 CL との交点を N とする. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BM}$ および $\overrightarrow{CL}$ をそれぞれ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の 1 次結合として表せ.

(2) $BM : BN = 1 : s, CL : CN = 1 : t$ とおいて, $\overrightarrow{BN}$ および $\overrightarrow{CN}$ をそれぞれ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の 1 次結合として表せ.

(3) s および t をそれぞれ m, n を使って表せ. $T-61$

3. 7　四面体 $OABC$ において, $OA \perp BC, OB \perp CA$ ならば, $OC \perp AB$ であることを証明せよ. (62　図情大)

3. 8　2 点 $A(0, 1, 2), B(5, 2, 9)$ がある. $BA \perp S$ で, 平面 S は A を通っていて, 点 P は平面 S 上にあるとする.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ の関係を示せ.

(2) 平面 S の方程式が $5x + y + 7z = 15$ となることを示せ. $T-2$

3. 9　空間の 2 点 $(0, 0, 1)$ および $(0, 0, -1)$ からの距離の和が一定な値 $2a$ であるような点全体を S とするとき, 次の問に答えよ. ただし, $a > 1$ とする.

(1) 図形 S の方程式を求めよ. 略図をかけ.

(2) S で囲まれる部分の体積を求めよ. $N-1$

3. 10　ベクトル $(1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 1)$ は互いに垂直であることを示せ. また, 上の 3 つのベクトルに直交する第 4 のベクトルを求めよ. (3　福井大)

4　空間の基

4. 1　ユークリッド空間 R^n で R_n を定義する. このとき内積を $< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ (x, y \in R_n)$ とする. $\overrightarrow{e_i} = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (i 番目のみ 1) に関する線形変換を $A = (a_{ij})_{ij=1\cdots n}, A\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)\overrightarrow{e_i}$ とするとき, 次式で定義される変換 B を求めよ. (59　名工大)

$$< A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, B\overrightarrow{y} >$$

4. 2　$R^4 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$ とする.

(1) W の基底を 1 組求めよ.

(2) W の直交補空間の正規直交基底を 1 組求めよ. (60　東工大)

4. 3　R^3 を 3 次元の実ベクトル空間とする．3 つのベクトル

$${}^t\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix}3 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

は R^3 の基底ベクトルであることを証明せよ．またベクトル ${}^t\begin{pmatrix}8 & 11 & 4\end{pmatrix}$ をこの基底を用いて表すとどのような成分になるか．　(60　電通大)

4. 4　$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\\ x_1-x_2-2x_3-2x_4=0\end{matrix} \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}9x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\\ 3x_1+x_2-6x_3-x_4=0\end{matrix} \right\}$ とおくとき, 次の問に答えよ．

(1) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ．

(2) $W_1 + W_2$ の次元を求めよ．

4. 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & O \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & & & 1 & -1 \\ & O & & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) R^5 の部分空間 $\{\vec{x}; A\vec{x} = \vec{0}\}$ の基底ベクトル系を求めよ．　(62　図情大)

5　行列

5. 1　次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$　(56　都立大)

(2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　(57　都立大)

(3) $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 8 & 9\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$　$N-61$

5. 2　$A = \begin{pmatrix}1 & -\tan\alpha/2\\ \tan\alpha/2 & 0\end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とするとき, $(E-A)^{-1}(E+A)$ を求めよ．　(53　東工大)

5. 3　A, B がそれぞれ対称行列であるとき, 積 AB の対称性を調べよ．　(56　理科大 (II) 数)

5. 4　x, y, z の同次 2 次式 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy-2yz$ について答えよ．

(1) $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくとき, $f(x,y,z) = {}^t XAX$ が成り立つような 3 次の対称行列 A を求めよ．

(注) (ア) 任意の行列 B に対し, その転置行列を ${}^tB$ で表す．

(イ) ${}^tB = B$ が成り立つような行列を対称行列という．

(2) 新しい変数 u, v, w が $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2\\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で与えられるとき, $f(x,y,z)$ を u, v, w で表せ．

$N-59$

5. 5　$i > j$ のとき $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$ なる行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ は上三角行列である．A, B の積が上三角行列であることを示せ．　(61　徳島大)

5．6　$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 - 3A$ を計算せよ.　(63　東商船大)

5．7　行列の $max\ min$ 積 ($\circ$ で示す) を通常の行列の積において, ”加法の演算 $(+)$ を最大値をとる演算 (max) に”, また”乗法の演算 $(\times)$ を最小値をとる演算 (min) に” 置き換えたもので定義する. 例えば, 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, a_{ij}, b_{ij} は任意の実数, に対して, $A \circ B$ の任意の要素は $max(min(a_{i1}, b_{1j}), min(a_{i2}, b_{2j}))$ となる.

行列 $C = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 \\ 8 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ のとき $C \circ C$ および $C \circ C \circ C$ を求めよ.　(63　図情大)

5．8　2 次以下の実数係数多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 全体で作る線形空間 (ベクトル空間) を V とする.

(1) V の変換 $T : f(x) \to \int_{-1}^{1} (t-x)^2 f(t) dt$ は V の線形変換 (一次変換) であることを示せ.

(2) この線形変換 T の, 基底 $< 1, x, x^2 >$ に関する表現行列を求めよ.　(63　名工大)

5．9　$a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x$ の形の関数全体の作る線形空間 (ベクトル空間) を V とする.

(1) V の次元を求めよ.

(2) V に $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$ で内積を定義する. このとき, V の変換 $T : f(x) \to f(x + \alpha)$ は直交変換であることを示せ.　(63　名工大)

5．10　$y_1 = x_1, y_2 = 2x_1 - x_2, y_3 = 4x_1 + 2x_2 - x_3$ について, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ となる行列 A, B を求めよ.　$N-63$

5．11　行列 A を次式で定め, 行列 X を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -ab & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AX = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -a & 0 & a \\ 0 & ab & ab \end{pmatrix}$$

6　行列の n 乗

6．1　$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ のとき, $\lim_{n \to \infty} A^n$ を求めよ.　(55　山梨大)

6．2　A を正方行列としたとき, $A^n = A^{n-1} A$ である.

(1) I を単位行列としたとき, $(\lambda I + A)^n = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \lambda^{n-k} A^k$ を数学的帰納法を使って証明せよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする A^2, A^3 を求めよ.

(3) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のとき, B^n を求めよ.　(55　東北大)

6．3　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の級数を求めよ. ただし I は単位行列である.

$$B = I + \sum_{n=1}^{\infty} A^n$$ (56 名工大)

6. 4 (1) $(2,2)$ の行列 A は $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられている. A^2, A^3, A^4 を求めよ.

(2) ある関数 $f(x)$ が無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に展開できるとき, ある行列 B の無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n B^n$ を $f(B)$ で書きあらわす. 行列 A を (1) で与えられているとするとき, $e^{\theta A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ であることを示せ. (58 北大)

6. 5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) A^2, A^3, A^4 を出し, A^n を予想せよ.

(2) それを数学的帰納法で証明せよ. (58 山口大)

6. 6 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A^2, A^3 を求めよ. さらに A^n を求めよ. (58 徳島大)

6. 7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ について, A^{50} を求めよ. (59 千葉大)

6. 8 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(0 < a < 1)$ について, 次の問に答えよ.

(a) A^{-1} を求めよ.

(b) $A^2 - (a+1)A + aI$ を求めよ. I は 2 次の単位行列とする.

(c) A^n を導き, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ. (60 都立大)

6. 9 2 次の行列を $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ. ただし, E は単位行列, n は自然数とする.

(1) $A\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ を満たす α, β の関係式を求めよ.

(2) $A^2 - 3A + 2E = O$ を満たす値 β を求めよ.

(3) (1), (2) より A^n を求めよ. (62 九大)

6. 10 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき,

(1) A^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(2) B^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ. (62 東商船大)

6. 11 $AD - BC = 1$ のとき, 次の式を証明せよ.

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n$$

ただし, $A_n \sin\theta = A\sin n\theta - \sin(n-1)\theta, B_n \sin\theta = B\sin n\theta$

$C_n \sin\theta = C\sin n\theta, D_n \sin\theta = D\sin n\theta - \sin(n-1)\theta$

$\cos\theta = (A+D)/2$ (1 長崎大)

7 行列と図形

7. 1 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ $(a > 0, ac - b^2 > 0)$ がある. この楕円を回転して軸を x, y 軸と一致させるのに必要な回転角 θ を求めよ. (47 信州大)

7. 2 正方行列 A によって 1 次変換される写像がある. 列ベクトル ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ

${}^t\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ に変換される行列 A を求めよ. $T-56$

7. 3 (1) $A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ が直交行列であることを示せ.

(2) A の幾何学的な意味を述べよ. (57　大阪府大)

7. 4　xy 直交座標における曲線が

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = c$$

と表されるという. この曲線に回転変換を行って

$$AX^2 + 2HXY + BY^2 = c$$

と表されるとき,

$$a + b = A + B, ab - h^2 = AB - H^2$$

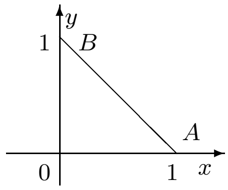
が成り立つことを示せ. (58　金沢大)

7. 5　次の行列 (a)∼(d) から直交行列を選び, 選んだものについて座標変換の行列としての幾何学的意味を述べよ.

(a) $\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (60　千葉大)

7. 6　xy 平面上の 1 次変換 $P = \begin{pmatrix}1/2 & a \\ b & 1/2\end{pmatrix}$, ($a, b$ は定数) によって, 下図に示す三角形 OAB を変換する. 点 A, B の像をそれぞれ A', B' として, 以下の問に答えよ.



(1) $\angle A'OB' = \theta$ として $\cos\theta$ を a, b で表せ.

(2) 三角形 $OA'B'$ の面積 S' を a, b によって表せ. さらに, $S' = 0$ とするような a, b は行列式の値 $|P| = 0$ を満足することを示せ.

(3) 三角形 OAB と三角形 $OA'B'$ が合同であるとき, $a > 0$ として a, b の値を求めよ. $T-62$

7. 7　2 点 $A(0, 1, 2), B(5, 2, 9)$ がある. $BA \perp S$ で, 平面 S は A を通っているとする.

(1) 平面 S と x 軸とが交わる点を Q とするとき, $OA \perp OQ$ を証明せよ.

(2) OA を軸として点 Q を回転させたときに点 Q が再び平面 S にぶつかるときの点 T の座標を求めよ. $T-2$

7. 8 (1) 空間の点 $\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ を平面 : $x + y = 0$ に関して対称な点 $\begin{pmatrix}x' \\ y' \\ z'\end{pmatrix}$ に移す変換を $\begin{pmatrix}x' \\ y' \\ z'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ と表したときの行列 A を求めよ.

(2) 空間の点 $\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ を平面 : $x + y + z = 0$ に関して対称な点 $\begin{pmatrix}x' \\ y' \\ z'\end{pmatrix}$ に移す変換を $\begin{pmatrix}x' \\ y' \\ z'\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ と表したときの行列 B を求めよ. $N-2$

8　逆行列

8. 1　次の各行列は正則か. 正則なら, その逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $N-56$　(2) $\begin{pmatrix}2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$ (57　理科大 (II) 数)

(3) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (59　電通大)　(4) $\begin{pmatrix}6 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}$ (63　東商船大)

(5) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (3　福井大)

8. 2　次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (56　都立大)　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (57　都立大)

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (57　熊本大)　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $N-61$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (62　都立大)　(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (57　千葉大)

(7) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $N-62$

(8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2　都立大)　(9) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1　広島大)

8. 3　$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ が正則行列になるための必要十分条件を α で表せ. (55　大阪府大)

8. 4　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$ が正則であるための条件を求めよ. (60　山口大)

8. 5　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

(1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E$ を求めよ.

(2) A が逆行列をもつ条件を示せ.

(3) A が逆行列をもつとき, その行列を求めよ. (60　東北大)

8. 6　行列 A を $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とするとき, 逆行列 A^{-1} は $A^{-1} = A(-\theta)$ で与えられることを証明せよ.

$T-61$

8. 7　$A \cdot A = A^2, A^{k-1}A = A^k$ となる行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ がある. 次の問に答えよ.

(1) A^n を求めよ.

(2) $S = \sum_{k=1}^{n} A^k$ を求めよ.

(3) S の逆行列を求めよ. (61　東北大)

8. 8　A, B が正則であるとき, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を証明せよ. (1　九大)

8. 9　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつ条件とその条件を満たしたときの A^{-1} の値を求めよ. (2　熊本大)

8. 10　行列 A を $A=A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とするとき, 逆行列 A^{-1} は $A^{-1}=A(-\theta)$ で与えられることを証明せよ. (2　都立科技大)

8. 11　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ のとき, $AB=I$ となる行列 B を求めよ. $T-2$

9　行列式

9. 1　次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix}1 & a & b & c+d\\ 1 & b & c & d+a\\ 1 & c & d & a+b\\ 1 & d & a & b+c\end{vmatrix}$ (50　東農工大)

(2) $\begin{vmatrix}a+b+c & a+b & a & a\\ a+b & a+b+c & a & a\\ a & a & a+b+c & a+b\\ a & a & a+b & a+b+c\end{vmatrix}$ (58　熊本大)

(3) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$ (60　山口大)

(4) $\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$ $T-60$

(5) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}$ (61　東商船大)

(6) $\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & d & 0 & 0\\ e & 0 & 0 & -a\end{vmatrix}$ $N-61$

(7) $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix}$ (62　東商船大)

(8) $\begin{vmatrix}0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & b_3 & b_2\\ -a_2 & -b_3 & 0 & b_1\\ -a_3 & -b_2 & -b_1 & 0\end{vmatrix}$ (62　電通大)

(9) $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 7 & 2 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 2 & 4\end{vmatrix}$ (62　東商船大)

(10) $\begin{vmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/6\end{vmatrix}$ $N-63$

(11) $\begin{vmatrix}x & a & b & c\\ a & x & b & c\\ a & b & x & c\\ a & b & c & x\end{vmatrix}$ (63　東商船大)

(12) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 7 & 5\\ 4 & 0 & 4 & 8\\ 8 & 0 & 2 & 3\\ 7 & 5 & 1 & 6\end{vmatrix}$ (2　佐賀大)

(13) $\begin{vmatrix}a^2+1 & ab & ac & ad\\ ba & b^2+1 & bc & bd\\ ca & cb & c^2+1 & cd\\ da & db & dc & d^2+1\end{vmatrix}$ (1　熊本大)

(14) $\begin{vmatrix}x-1 & -2 & -3 & -4\\ -1 & x-2 & -3 & -4\\ -1 & -2 & x-3 & -4\\ -1 & -2 & -3 & x-4\end{vmatrix}$ $N-1$

9．2　次の行列式の値を求めよ．

(1) $x+y+z=\pi$ のとき，$\begin{vmatrix} -1 & \cos z & \cos y \\ \cos z & -1 & \cos x \\ \cos y & \cos x & -1 \end{vmatrix}$ (57　北大)

(2) $w^3=1, w\neq 1$ のとき，$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$ (61　都立大)

9．3　次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} -c & -a & a+b+c \\ -b & a+b+c & -a \\ a+b+c & -b & -c \end{vmatrix}$ (53　秋田大)

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ (55　群馬大)

(3) $\begin{vmatrix} 1+x^4 & x+x^3 & x^2 \\ 1+y^4 & y+y^3 & y^2 \\ 1+z^4 & z+z^3 & z^2 \end{vmatrix}$ (57　北大)

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$ (60　電通大)

(5) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$ (57　山梨大)

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ (57　秋田大)

(7) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & ab \\ 1 & a^2 & bx \\ 1 & b^2 & ax \end{vmatrix}$ $N-60$

(8) $\begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & a+c & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$ (59　東北大)

(9) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos 2\beta \\ 1 & \cos\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$ (1　広島大)

(10) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$ (1　佐賀大)

(11) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x \\ 1 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 1 \\ x & 1 & 0 & x \end{vmatrix}$ $N-2$

9．4　次の方程式を解け．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ (56　千葉大)

(2) $\begin{vmatrix} 1-x & a & a \\ a & 1-x & a \\ a & a & 1-x \end{vmatrix} = 0$ (55　千葉大)

9．5　次の n 次元行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ b & a+b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a+b \end{vmatrix}$ (46　信州大)

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 1-n & 0 \end{vmatrix}$ (59　東北大)

9. 6　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ の展開式を $P = f(a, b, c, d)$ とする.

(1) P の a^3b^2c の項の係数を求めよ.

(2) $P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ となることを証明せよ. (53　山梨大)

9. 7　次の等式を証明せよ. (57　熊本大)

$$\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = 0$$

9. 8　x, y, z の関数 $f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)$ が次式で与えられている.

$$f(x,y,z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}, g(x,y,z) = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix}, h(x,y,z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix}$$

$g(x, y, z), h(x, y, z)$ が $f(x, y, z)$ で割り切れることを証明し, その商を求めよ. $N-57$

9. 9　a は実数, x は複素数とする.

$$\begin{vmatrix} a+x & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+x & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+x & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+x & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+x & -a \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} = 0$$

(1) 行列式を展開せよ.

(2) 展開式より x を求めよ.

(3) $a = 1$ のとき, $y = \dfrac{1}{x}$ はいくらか. (58　東大)

9. 10　$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & d \end{vmatrix} \neq 0$ のとき, x について次の方程式を解け. (60　東工大)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & x \end{vmatrix} = 0$$

9. 11　行列 X に対して $X^t, X^{-1}, |X|$ はそれぞれ X の転置行列, 逆行列, 行列式を表す. 実数を要素とする 2×2 行列 A, B に対して, 次の問に答えよ.

(1) $|A + A^t| + |A - A^t|$ および $|A + A^{-1}| + |A - A^{-1}|$ を $|A|$ を用いて表せ. ただし, $|A| \neq 0$ とする.

(2) $|B - \lambda E| = 0$ を満たす λ の値が 1 と 2 であるとき, $|B^2 - 3B|$ の値を求めよ. ただし, E は単位行列とする.

(61　九州大)

9. 12　4 次の行列式 $|a_{ij}|$ の展開式において, $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ の係数を求めよ. (61　熊本大)

9. 13　$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき,

(1) $AB - BA$ を求めよ.

(2) $|A - \lambda E| = 0$ となる λ を求めよ. (62 徳島大)

9. 14 2 次の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}$ に対して, $a = 1, b = -2$ における行列式 $|AB|$ の値は幾らか. $T - 1$

10 行列式の応用

10. 1 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を通る円の方程式は, 右の式で与えられることを証明せよ. また, この円の中心と半径を求めよ. (56 埼玉大)

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

10. 2 (1) $\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ x & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ は $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式を表すことを説明せよ.

(2) $\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ は (x, y) 平面上の (　) を通る (　) を表す. (　) を埋めよ. (58 千葉大)

10. 3 3 直線 $a_i x + b_i y + c_i = 0 (i = 1, 2, 3)$, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき, 3 直線が共有点をもつ条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

であることを証明せよ. (62 広島大)

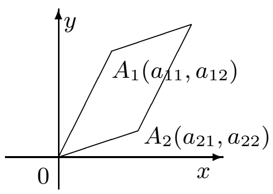
10. 4 平面上の 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ が同一直線上にあるとき, 次の関係式があることを証明せよ. (1 佐大)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

10. 5 右図に示される平行四辺形の面積は

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

の絶対値で与えられることを証明せよ. (63 北大)



10. 6 $\overrightarrow{A} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}, \overrightarrow{B} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}, \overrightarrow{C} = c_x \overrightarrow{i} + c_y \overrightarrow{j} + c_z \overrightarrow{k}$ が同一平面内にあるとき, 行列式 $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ の値を求めよ. ただし, $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸上の単位ベクトルとする. (2 北大)

11 階数と方程式

11. 1 次の連立方程式を解け.

(1) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$$ (54 都立大)

(2) $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + x_3 = m-2 \\ x_1 + (m+1)x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2 \end{cases}$ (56　北大)

(3) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 2 \\ 2x - y + z - u = -4 \\ 3x + y + 4z + 3u = -2 \\ x + 3y + 4z + 5u = 2 \end{cases}$ (59　広島大)

(4) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ (60　金沢大)

(5) $\begin{cases} 4x + 2y + 3z + w = 1 \\ x + y - 2w = 2 \\ 5x + 2y + 4z - w = 0 \end{cases}$ (62　東商船大)

(6) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ (63　電通大)

(7) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$ (63　都立大)

(8) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ (63　東商船大)

(9) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2　都立大)

(10) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x - y - 2z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$ (3　北大)

11. 2　$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \\ kx + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $x = y = z = 0$ 以外の解を持つように k の値を定めよ.

(2) (1) で求めた k に対して, 解全体の集合の R^3 での次元を求めよ. (56　広島大)

11. 3　次の連立方程式を満足する, ことごとくは 0 でない x, y, z の値が存在するように m の値を定めよ. (58　図情大)

$$\begin{cases} mx + y - 3z = 0 \\ 5x - 3y - mz = 0 \\ 4x - 7y + (m+1)z = 0 \end{cases}$$

11. 4　連立方程式のクラーメルの公式を導け. (58　金沢大)

11. 5 (1) 行列式を用いて次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = a_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = a_2 \end{cases}$$

(2) 係数の間に $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ なる関係があるとき, 上の連立方程式が解を持つための条件を求めよ.　(60　北大)

11. 6　次の連立方程式は, 定数 α の如何によって, 解が一意に決まるか, あるいは解が存在しないかのいずれかであることを証明せよ.　(60　図情大)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11. 7　$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられているとき, 以下の問に答えよ.

(1) 行列式 $|M|$ を求めよ.

(2) 行列の積 MX を書け.

(3) $MX = Y$ を満たすような X を求めよ.

(4) X が解をもたないときの条件を数式で表せ.　(62　北大)

11. 8　次の 3 行 4 列の行列 A に対して, その階数が 2 になるように未知数 x の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 5+x \\ 7 & 5+x & 9 & 1+3x \end{pmatrix}$$

(63　電通大)

11. 9　連立 1 次方程式:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -4 \\ 4x + y - 3z = 2 \\ -x + 2y + 2z = -6 \end{cases}$$

の解を, クラーメルの公式を用いて求めよ.　(63　広島大)

11. 10　4×3 の 3 次元から 4 次元への変換行列 A がある.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

という条件がある.

(1) $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 行列 X を求めよ.

(2) A の階数を求めよ.　(1　東工大)

12　固有値

12. 1　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix}, f(x) = |xE - A|$ とする. $f(1) = -18, f(2) = -24, f(3) = -20$ であるとき, A の固有値を求めよ.　(54　金沢大)

12. 2　$f : R^3 \to R^3$ において,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$$

を表す行列 A を求め, その固有値を求めよ. (56　岩手大)

12. 3　次の行列の固有値を求めよ. (57　明治大)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. 4　ユニタリ行列 (または直交行列) の固有値の絶対値は 1 であることを示せ. (57　広島大)

12. 5　次の行列 A について, 以下の問に答えよ. ただし, a は実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の階数 $(rank)$ を求めよ.

(2) $\overrightarrow{x}$ を列ベクトルとするとき, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ となる $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0})$ を求めよ. $T-57$

12. 6　線形変換 $\overrightarrow{x'} = A\overrightarrow{x}$ が正規直交基底 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ に関して

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1' = 6x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

で表されているとする.

(1) この変換 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) この固有ベクトルを正規化して, $\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}$ とする. $\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}$ は直行することを示せ. (58　図情大)

12. 7　$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正になる必要十分条件が $|A| > 0$ であることを示せ. (59　金沢大)

12. 8　3 次の直交行列 $A = (a_{ij}), |A| = 1$ において, 次の問に答えよ.

(1) $a_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ を証明せよ.

(2) 1 は固有値であることを示せ. また, $tr(A) = -1$ のとき, -1 も固有値であることを示せ. (59　金沢大)

12. 9 (1) 次の行列 A を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $|A| = 0$ となるためには λ をいくつにすればよいか. (60　徳島大)

12. 10　3 次の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 対称行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$, 交代行列 $C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix}$, として $A = B + C$ とする. B の対角項の和 $b_{11} + b_{22} + b_{33} = 3b_0$ を用いて, $b_{11}' = b_{11} - b_0, b_{22}' = b_{22} - b_0, b_{33}' = b_{33} - b_0$ とおき, $B' = \begin{pmatrix} b_{11}' & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22}' & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33}' \end{pmatrix}$ を定義する. B の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, B' の固有値を $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ とする. スカラー $J = -(b_{11}'b_{22}' + b_{22}'b_{33}' + b_{33}'b_{11}') + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2$ とする.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ としたとき, B, C, B' を定め, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, J$ を求めよ.

(2) J を $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ で表せ.

(3) J を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ で表せ. (60　東大)

12. 11　$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$ が与えられているとき, 次の問に答えよ.

(1) $A(t)$ の階数を求めよ.

(2) $A(t_1)A(t_2) = A(\tau)$ のとき τ を求めよ.

(3) スペクトラム (固有値の集合) を求めよ.　(61　大分大)

12. 12　行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ とし, 行列式 $|A - xE| = 0$ となる x の値を求めよ. その最大値を α とおいて, $A\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{v}$ となるベクトル $\overrightarrow{v}$ を求めよ.　$N-62$

13　固有ベクトル

13. 1　次の各行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(57　山梨大)　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(57　熊本大)

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2　都立科技大)　(4) $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$　(62　東商船大)

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(62　宮崎大)　(6) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$　(63　東商船大)

(7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　(63　広島大)　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(1　九大)

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2　徳島大)　(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3　福井大)

13. 2　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = P^{-1}AP$ とおき, B の固有値および固有ベクトルを求めよ.　(57　東工大)

13. 3 (1) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$ を求めて因数分解せよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ で $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ が成り立つ λ を求めよ. ただし, λ はスカラーで $\overrightarrow{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ である. また $\overrightarrow{x}$ を求めよ ($\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$).　$T-57$

13. 4　次の問に答えよ.

(1) 単位行列でない 2 次の直交行列を 1 つ作れ.

(2) 一般に直交行列の固有値は絶対値 1 の複素数であることを示せ.　(62　広島大)

13. 5　行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ とし, 行列式 $|A - xE| = 0$ となる x の値を求めよ. その最大解を α とおいて $A\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{v}$ となるベクトル $\overrightarrow{v}$ を求めよ.　$N-62$

13. 6　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, 行列式 $|A|$ が正ならば, A の固有値も正となることを示せ.　(63　金沢大)

13. 7　行列 A を $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ として, 次の問に答えよ.

(1) 行列式 $detA$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.　(63　愛媛大)

13. 8　$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を求め, 実数の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.　(63　徳島大)

13. 9　4 次行列を 2 次行列 ×2 次行列と表したものを $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ と表す. すなわち

$$4\text{ 次行列}=\begin{pmatrix} \text{左上の } 2\times 2 \text{ を } A & \text{右上の } 2\times 2 \text{ を } B \\ \text{左下の } 2\times 2 \text{ を } C & \text{右下の } 2\times 2 \text{ を } D \end{pmatrix}$$

(1) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}$

上の関係があるとき, 左上の 2×2 行列を使って下の関係があることを示せ.

$$(A\ B)\begin{pmatrix} E \\ G \end{pmatrix}=(AE+BG)$$

(2) 単位行列 I, 零行列 O, 任意行列 A を 2×2 の行列としたとき, 行列 $\begin{pmatrix} I & O \\ A & I \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と置くとき, $\begin{pmatrix} I & O \\ A & 2I+3A \end{pmatrix}$ の固有値 (固有値 λ は複素数) と固有ベクトルを求めよ.　(1　阪大基)

13. 10　A, Y を n 次正方行列, E を n 次単位行列とし, $f(x,Y)$ を次式で表す.

$$f(x,Y)=|xE-AY|-|xE-YA|$$

(1) $f(x,Y)|Y|=(|xE-AY|-|xE-YA|)|Y|=0$ を証明することにより

$$|xE-AY|=|xE-YA|$$

を証明せよ.

(2) $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{0}$ を n 次元列ベクトルとする. ここで $A=(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{0}, \cdots, \overrightarrow{0}), Y=A^t$ とする. このとき (1) を利用して

$$|xE-\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a}^t|=x^{n-1}(x-\overrightarrow{a}^t\overrightarrow{a})$$

を証明し, 0 でない固有値を求めよ.

(3) 対角要素を n, 非対角要素を -1 とする行列の固有値と, n に無関係な固有ベクトルを (1), (2) を利用して求めよ.

(2　阪大工)

14　固有空間

14. 1　$A=\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルが R^4 全体を張るための必要十分条件を求めよ.　(59　東工大)

14. 2　行列の関係式

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$ があるとき, 次の問に答えよ.

① (1) 式で x, y, z が共に 0 でないときの k の値を求めよ.

② 上問で求めたそれぞれの値 k のとき, その方程式をグラフに描け. $T-62$

14. 3　3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ がある.

① A の固有値 1 に対する固有空間 $V \subset R^3$ を求めよ.

② ベクトル $\overrightarrow{y} \in R^3$ が①の固有空間 V に直交するとして, $\overrightarrow{y}$ と $A\overrightarrow{y}$ のなす角を求めよ. (63　熊本大)

14. 4　A, B を n 次の対称行列とし, C を正則行列とする. $B = C^{-1}AC$ のとき

(1) A と B の固有多項式が一致することを証明せよ.

(2) またこのとき, A の固有値を λ, λ' とし, 次の部分空間 W, W' の間の関係を求めよ.

$$W = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| AX = \lambda X \right\}, W' = \left\{ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \middle| AY = \lambda' Y \right\}$$ (63　東工大)

14. 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と, それに対応する固有空間を求めよ. (63　名工大)

15　Jordan 標準形

15. 1 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $n \times n$ 行列 C, P があって P が正則のとき, C の固有方程式と PCP^{-1} の固有方程式が一致することを証明せよ.

(3) (1) の行列について $PCP^{-1} = B$(対角行列) が成り立つ P を求めよ. (55　東大)

15. 2　$n \times n$ 行列 A が $A^2 = E_n$(E_n は n 次の単位行列) を満たすとき, $R(A - E_n) + R(A + E_n) = n$ であることを証明せよ. (55　山梨大)

15. 3　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ がある.

(1) 固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような P を求めよ. (56　東工大)

15. 4　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ がある. 次の問に答えよ.

(1) A, B の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) A と PAP^{-1} の固有方程式が同じであることを示せ.

(3) $B = PAP^{-1}$ の P を求めよ. (56　東大)

15. 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有ベクトルを求めよ.

(3) 適当な正則行列 P を求めて, $P^{-1}AP$ を対角行列にせよ. (60　広島大)

15. 6　行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 標準形で表せ. (62　熊大)

15. 7　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, 次の問 (1)(2)(3) に答えよ.

(1) 行列式 $det(A)$ の値を求めよ.

(2) 固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(3) $AW = W\Lambda, W^TW = I$ となるような対角行列 Λ と行列 W を求めよ. (62　図情大)

15. 8　行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$(ただし, $\theta \neq n\pi : n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) は実数行列の範囲では対角化不可能であるが, 複素数行列の範囲では, 対角化可能である. その理由を説明せよ. (63　名工大)

15. 9　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ なる行列がある.

(1) 階級を求めよ.

(2) 逆行列を求めよ.

(3) 固有値を求めよ.

(4) A は対角化できるか.

(5) A を対角化できたならば, 対角化行列 P および $D = P^{-1}AP$ を求めよ. (63　京大)

15. 10　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ベクトル $\overrightarrow{\lambda}$, スカラー ν があり, $A\overrightarrow{\lambda} = \nu\overrightarrow{\lambda}$ が成立しているとき,

(1) 固有ベクトル $\overrightarrow{\lambda_i}$, 固有値 ν_i を求めよ.

(2) 行列 T を $T = (\overrightarrow{\lambda_1}, \overrightarrow{\lambda_2}, \overrightarrow{\lambda_3})$ として, T^{-1} を T の逆行列とするとき, $T^{-1}AT$ を求めよ.

(3) $\overrightarrow{x}(k)$ を 3 次元列ベクトルとするとき, $\overrightarrow{x}(k)$ は次の漸化式

$$\overrightarrow{x}(k) = A\overrightarrow{x}(k-1) \qquad k = 1, 2, 3, 4, \cdots$$

をみたす. $\overrightarrow{x}(0) = {}^t(0\ 1\ 0)$ とするとき, $\overrightarrow{x}(k)$ を k の関数として表せ. $T-63$

15. 11　$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき次の設問に答えよ.

a) A^{-1} を求めよ.

b) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

c) A を対角化する直交行列 P および対角化された行列 P^TAP を求めよ. ただし P^T は P の転置行列を表す.

(1　千葉大)

15. 12　$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} (a \neq 0)$ とする.

(1) A^{-1} を求めよ.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて, ${}^tPAP$ を対角行列となるようにせよ. (1　金沢大)

15. 13　$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ a^2 - a + 1 & -3a \end{pmatrix}$, $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ であるとき, λ が 2 個の実数解をもつときの a の範囲を求めよ. $T-2$

15. 14　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) 正則行列 T を求めて, $D = T^{-1}AT$ を対角行列とせよ.

(3) 行列 D を用いて, A^n を求めよ. (2 名大)

16 Jordan 標準形の応用

16. 1 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について

(1) 固有値を求めよ.

(2) 直交行列を用いて A を対角化せよ.

(1) A^n を求めよ. (55 東工大)

16. 2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ という行列がある. 次の問に答えよ.

(1) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる P の一つを求めよ.

(2) $B^n = P^{-1}A^nP$ なることを示せ.

(3) $exp(A) = E + A + \dfrac{A^2}{2!} + \cdots$ なる行列 $exp(A)$ を求めよ. (東工大)

16. 3 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) この行列の階級が 2 であるための条件を求めよ.

(2) この行列の固有値がすべて正であるための条件を求めよ.

(3) 2 次曲面 $x^2 + 2y^2 + az^2 - 2xy - 2yz = 1$ が実楕円体であるための条件を求めよ. (61 図情大)

16. 4 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) (1) を利用して, A の対角化行列 T を求めよ.

(3) $2yz + 2zx + 2xy + 1 = 0$ を標準化して, 概形を描け. (62 金沢大)

16. 5 実二次形式 $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_2x_3$ で表し, 行列 $F = (f_{ij})$ は 3 次の対称行列である.

(1) ベクトル $\overrightarrow{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ と対称行列 $F = (f_{ij})$ を用いることにより, $\overrightarrow{x}^t F \overrightarrow{x} = g(x_1, x_2, x_3)$ が成立している. その行列 F を求めよ.

(2) F の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ および単位長さに正規化された固有ベクトル $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ を求めよ.

(3) 列ベクトル $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ を横に並べて作られる $P = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ が直交行列になることを確かめよ. また, 座標変換 $\overrightarrow{x} = P\overrightarrow{y}$ とおいて $g(x_1, x_2, x_3)$ の 2 次形式が標準化できることを示せ. ただし $\overrightarrow{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ とする.

(1 阪大工)

16. 6 行列 A, P が次のように表されるとき, 次の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) P^{-1} を計算せよ. (2) $P^{-1}AP$ を計算せよ. (3) $P^{-1}A^5P$ を計算せよ. (2 愛媛大)

17 総合問題

17. 1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に関して, 以下の問に答えよ.

(1) A の逆行列を求めよ.

(2) A の階数 (ランク) を求めよ.

(3) A の固有値と正規化された (長さ 1 の) 固有ベクトルを求め, 正規化された固有ベクトルを直角座標上に図示せよ.

(4) A^{100}(A の 100 乗) を求めよ. (58　佐賀大)

17. 2　次の 5 次の正方行列 A について, 次の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A^2 を求めよ.

(2) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(3) 行列 A の $rank$(階数) を求めよ.

(4) 行列 A は正則行列であるが, 理由を記して答えよ. (1　佐大)

17. 3　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) A の逆行列を求めて, 方程式 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け. (1　愛媛大)

17. 4 (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ のとき, A^2, A^{-1} を求めよ.

(2) $A^n = \begin{pmatrix} c_n & d_n \\ d_n & c_n \end{pmatrix}, c_n = \dfrac{1}{2}\{(a+b)^n + (a-b)^n\}, d_n = \dfrac{1}{2}\{(a+b)^n - (a-b)^n\}$ を数学的帰納法で証明せよ.

(3) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは単位ベクトルとする. (3　東北大)