第 4 章

微分法

1　数列

1. 1　次の数列の和を求めよ.　$1+4+7+\cdots+(3n+1)$　$N-1$

1. 2 (1) ある等比数列の初項から 8 項までの和は, 初項から 4 項までの和の 17 倍であるという. この数列の公比を求めよ.

(2) 初項が 8, 第 4 項が -1 の等比数列がある. この数列の公比を求めよ.

(3) 初項が 16, 第 5 項が -1 であるような実数の等比数列の存在について論ぜよ.　(58　北大)

1. 3　数列の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$ を求めよ.　(59　千葉大)

1. 4　数列 $1,2,3,3,4,5,5,6,7,7,8,9,9,\cdots$ の第 n 項を求めよ. また, 第 n 項までの和を求めよ.　(59　図情大)

1. 5　数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ において, 各数列の隣接する 2 項 a_n,a_{n+1} および b_n,b_{n+1} の間に

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

という関係が成立するとき, その一般項 a_n,b_n を以下の手順にしたがって求めよ.

(1) 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ について, $A\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i=1,2$ となる 2 つの定数 λ_1,λ_2 を求めよ.

(2) 前問でベクトル $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, (i=1,2)$ に対応する定数 λ_i を求めたが, いまベクトル $\begin{pmatrix} a_{n,i} \\ b_{n,i} \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} a_{n,i} \\ b_{n,i} \end{pmatrix}=\lambda_i^n\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と表すものとする. このとき, $\begin{pmatrix} a_{n+1,i} \\ b_{n+1,i} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_{n,i} \\ b_{n,i} \end{pmatrix}$ が成立することを示せ.

(3) 以上の結果から数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の一般項が $a_n=c_1a_{n,1}+c_2a_{n,2},\quad b_n=c_1b_{n,1}+c_2b_{n,2}$　$(c_1,c_2$ は定数$)$ の形に表されるという. 数列の初項 a_1,b_1 が $a_1=-10,b_1=40$ のとき, 一般項 a_n,b_n を求めよ.　$T-60$

1. 6　数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ によって定義する.

(1) 二項定理を用いて, $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ を示せ.

(2) すべての正整数 n に対して, $n!>2^{n-1}$ を数学的帰納法を用いて示せ.

(3) すべての正整数 n に対して, $a_n<3$ が成り立つことを示せ.

(4) すべての正整数 n に対して, $a_n<a_{n+1}$ が成り立つことを示せ.　(61　鹿大, T)

2　級数

2. 1　次の級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　(63　都立大)　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$　(63　都立大)

2. 2　次の級数の収束, 発散を調べ, 収束の場合は求められる限りその和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ (57　東農工大)

(2) $1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\cdots$ (58　佐賀大)

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ (1　東農工大)

(4) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots$ (2　佐賀大)

2. 3　数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．$a_1=1, n\geqq 2$ については $a_n=2^{-(k+1)}$, ここで k は $2^k<n\leqq 2^{k+1}$ を満たす整数とする．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束するか発散するか理由をつけて答えよ．

(2) $b_n=\dfrac{1}{n}$ とするとき, $n\geqq 3$ に対して不等式 $a_n\leqq b_n$ が成り立つことを示せ．

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は収束するか発散するか理由をつけて答えよ． (60　鹿大)

2. 4 (1) 二項展開を用いて次の式を証明せよ．ただし, $\alpha>0$ とする．

$(1+\alpha)^n>\dfrac{n(n-1)}{2\alpha^2}$

(2) (1) を用いて, 次の極限を求めよ．

$a)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\alpha)^n}$　　$b)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\alpha)^n}$

(3) 次の和を求めよ．(証明不要)

$a)$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$　　$b)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$

(4) (3) を用いて, 次の和を求めよ．(ただし, $|x|<1$)

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$　　$b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ (61　東北大)

2. 5　正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ の収束発散判別法を一つ書け． (62　東農工大)

2. 6　次の級数の収束半径を求めよ．　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(2n)!x^n}{(3n)!}$ (63　東商船大)

2. 7　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$ において $x=\dfrac{1}{2}$ としたときの級数の値を求めよ． $T-63$

2. 8　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$ において, $x=\dfrac{1}{4}$ としたときの級数の値を求めよ． $T-1$

3　漸化式

3. 1　数列 $\{a_n\}$ の各項に次の関係があるとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(1) $a_1=4, a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}$

(2) $a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{5}$ (1　千葉大)

3. 2　$\sigma=\{(a_1,a_2,\cdots,a_{10})|a_{k+3}=3a_{k+2}+2a_{k+1}+a_k, k=1,\cdots,7\}$ のとき, 空間 σ の次元を求めよ． (52　山梨大)

3. 3　$a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}, a_1=1$ として, 次の問に答えよ．

(1) $a_{n+1}-a_n$ を a_n と a_{n-1} で表せ．

(2) この数列が増加数列であることを示せ．

(3) $a_n<2$ を示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ は存在するか．するならばその値を求めよ． (59　東北大, 2　都立大)

3. 4　$a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{a_n+\dfrac{2}{a_n}}{2}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1) $\{a_n\}$ が収束すると仮定して $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を求めよ.

(2) $\alpha < a_n$ かつ $\{a_n\}$ が減少数列であることを示せ.

(3) $a_{n+1} - \alpha < \dfrac{a_n - \alpha}{2}$ を示せ. (62　鹿大)

3. 5　数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が次の漸化式で与えられている. 以下の問に答えよ.

$$a_1 = 1, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3b_n, b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \qquad (n > 1)$$

(1) $x_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とおくと, 上の漸化式は $x_{n+1} = Ax_n$ となる. x_n を A と x_1 で表せ.

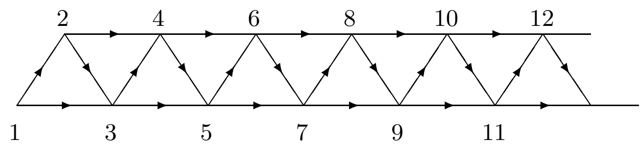
(2) A の固有値 α, β と固有ベクトルを求めよ.

(3) 次式を満たす P を求めよ.　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = D$

(4) これから, $A = PDP^{-1}$ と書ける. これを使って A^{n-1} を求めよ.

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ. (2　千葉大)

3. 6　下図のような数字と矢印のついた図形がある. 数字 n の点への異なる道筋の数を f_n とする. 以下の問に答えよ.



(1) f_2, f_3, f_4, f_5 を求めよ.

(2) $n \geqq 4$ のとき, f_n を f_{n-1}, f_{n-2} を用いて表せ. また, A を 2 行 2 列の行列として $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix}$ を満たす A を求めよ.

(3) 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 P^{-1} を求めよ.

(4) 行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(5) f_n を求めよ. 必要ならば $f_1 = 1$ とおけば $n = 3$ のときも (2) の関係が成り立つことを利用してよい. (2　東北大)

3. 7　n を自然数とするとき

(1) $A_n = \displaystyle\int_0^n |e^{ax} \sin \pi x| dx$ を求めよ. ただし, $a \neq 0$, 実数.

(2) $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ が収束するための a の範囲を求めよ. そのとき, $\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ. (2　金沢大)

4　極限値

4. 1　$n \to \infty$ のとき, 次式の極限値を求めよ.

(1) $\dfrac{\log n}{n!}$ (57　東農工大)　(2) $\dfrac{a^n}{n!}$ (58　広島大)

(3) $\dfrac{n!}{n^n}$ (58　広島大)　(4) $\log(n+1) - \log n$ (58　広島大)

(5) $\sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-2})$ $T-62$　(6) $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$ (2　千葉大)

(7) $\dfrac{3n+1}{n^2}$ $N-1$　(8) $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ (2　千葉大)

(9) $n - \sqrt{n^2 + 3n}$ $T-2$　(10) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (3　福井大)

4. 2　$x \to 0$ のとき, 次式の極限値を求めよ.

(1) $\dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ (56　千葉大)　(2) $\dfrac{\sin 5x}{x}$ (57　千葉大)

(3) $\dfrac{\sin x}{x}$ (58　広島大)　(4) $\dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ (58　広島大)

(5) $\dfrac{x^2+\sqrt{(1-\cos^2 x)x^2+2x^5}}{x^2+x^3}$ (59　岩手大)　(6) $\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ (60　東農工大)

(7) $\dfrac{\sqrt{1+2x+3x^2}-\sqrt{1-3x}}{3x}$ (61　千葉大)　(8) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (62　千葉大)

(9) $\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$ $N-63$　(10) $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}}{x}$ $N-1$

4. 3　$x \to 0$ のとき, 次式の極限値を求めよ.

(1) $\dfrac{x\cos x-x}{\log(1+x^2)}$ (55　東農工大)　(2) $(\log(1+x))^x$ (56　千葉大)

(3) $\dfrac{x-\log(1+x)}{x^2}$ (56　東農工大)　(4) $\dfrac{x^\alpha}{e^x-1}$　$(\alpha \neq 0)$ (60　北大)

(5) $\dfrac{a^x-b^x}{x}$　$(a>0, b>0)$ (60　広島大)　(6) $\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ (61　広島大)

(7) $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ (61　広島大)　(8) $\dfrac{3^x-1}{x}$ (62　東商船大)

(9) $\dfrac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$ (62　東商船大)　(10) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (59　東農工大, 63　電通大)

(11) $\dfrac{x}{\sqrt{1+\tan^{-1}2x}-\sqrt{1+\tan^{-1}x}}$ (63　千葉大)　(12) $\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ (63　東商船大)

4. 4　$x \to +0$ のとき, 次式の極限値を求めよ.

(1) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$ (56　千葉大)　(2) $(1-\sin 2x))^{\frac{1}{x}}$ (59　名工大)

(3) $x\log x$ (57, 62　東農工大)　(4) x^x (60, 63　東商船大)

(5) $(\sin x)^x$ (1　東農工大)

4. 5　$x \to 1$ のとき, 次式の極限値を求めよ.

(1) $\dfrac{x^n-1}{x-1}$　(n は正整数) (57　千葉大)　(2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ (60　北大)

(3) $\sqrt{x^{\frac{1}{x-1}}}$ (62　東商船大)

4. 6　$x \to \infty$ のとき, 次式の極限値を求めよ.

(1) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}$ (57　千葉大)　(2) $\dfrac{(x+a)\log(x+a)}{x\log x}$ (57　東農工大)

(3) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$ (59　東農工大)　(4) $\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$ (60　東工大)

(5) $x^{\frac{1}{x}}$ (61　東農工大)　(6) $x\left(\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (62　広島大)

(7) $\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}$ (62　電通大)　(8) x^2e^{-2x} (63　広島大)

(9) $\log_a\dfrac{1+x}{x}$ (1　千葉大)　(10) x^3e^{-x} (1　山口大)

(11) x^3e^{-ax}　$(a>0)$ (1　広島大)　(12) $\dfrac{\log(2x+1)}{\log(x+1)}$ $T-1$

(13) $x(\sqrt{x^2+4}-x)$ (3　名大)　(14) $\dfrac{x}{a^x}$ (3　金沢大)

4. 7　$\theta \to \dfrac{\pi}{2}-0$ のとき, 次式の極限値を求めよ.　$(\pi-2\theta)\tan\theta$ (2　千葉大)

4. 8　$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+2x^2-1}{x^{2n}+1}$ のグラフを描き, 不連続点を求めよ.　(52　山梨大)

4. 9　半径 r の円の半径 OA の延長線上に P をとり, P から円 O に接線 PT を引き, その接点を T とする. T から OA に垂線 TN を下ろし, その足を N とする. $\lim_{P\to A}\dfrac{NA}{AP}$ を求めよ.　(53　山梨大)

4. 10　$a_0=a, a_{n+1}=pa_n+q$ で定められる数列 $\{a_n\}$ があり, $b_n=pa_n+\lambda$(λ は定数) のとき, 次の問に答えよ.

(1) b_n について, 漸化式で表せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を n を用いて表せ.

(3) $a=1$ のとき, $\{a_n\}$ の極限値を求めよ.　(55　東北大)

4. 11 (1) $1^2+2^2+\cdots+n^2$ を $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$ を使って求めよ.

(2) 直角三角形の斜辺の長さを a とする. 頂点 A から $n+1$ 等分した斜辺 BC の各辺に引いた線分の長さの平方をそれぞれ $D_1, D_2, \cdots, D_n$ とするとき, その総和を求めよ.

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}D_k$ を求めよ.　(55　東北大)

4. 12　$n\to\infty$ のとき, 次式の極限値を求めよ.

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$　(2) $\sqrt[n]{n!}$　(3) $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$　(57　北大)

4. 13　無限数列 $\{a_n\}$ が α に収束することの条件を $\varepsilon-\delta$ 法を用いて述べよ.　(57　東農工大)

4. 14　次の問に答えよ.

(1) a と b が正数であるとき, 次の不等式を証明せよ.

$\sqrt{ab}\leqq\dfrac{a+b}{2}$

また, この式の等号が成立するのはどのような場合か.

(2) 任意の正整数 n に対して

$a_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$

と定義する. (1) の関係を利用して, 不等式 $a_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ を導け.

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ.　(57　東北大)

4. 15　$S_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}$ を求め, さらに $T_n=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}-S_n\right)^2}$ を求めよ. また, $\lim_{n\to\infty}S_n$, $\lim_{n\to\infty}T_n$ の値を求めよ.

$T-61$

4. 16　$f(n,k)=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ として, 次の問に答えよ.

(1) $f(n,k)+f(n,k+1)=f(n+1,k+1)$ を示せ.

(2) $\sum_{k=0}^{n}f(n,k)=2^n$ を数学的帰納法で示せ.

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^m}{2^n}=0$ がどんな数 m に対しても成り立つことを示せ.　(1　三重大)

4. 17　$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, $\sum_{i=0}^{\infty}(\sin 2\theta)^i$ を求めよ.

5　連続性と微分可能

5. 1　次の関数において, 微分可能性と連続性を判定せよ.

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases}x^h\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$　$(h=1,2,3,\cdots)$　(50　山梨大)

5. 2　$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)$ は $x=0$ において連続か不連続か.　(51　東農工大, 60　東北大)

5. 3 (1) $x=a$ で $f(x)$ が連続とはどういうことか．定義を書け．
(2) $x=a$ で $f(x)$ が微分可能とはどういうことか．定義を書け．　(62　東農工大)

5. 4　$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能ならば，
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
であるような c が (a,b) の中に少なくとも一つ存在することを証明せよ．　(2　北大)

5. 5 (1) $f_n(x)=nx(1-x)^n$, 区間 $[0,1]$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．
(2) (1) で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は一様収束するか．　(3　金沢大)

6 微分

6. 1　次の関数 y を x で微分せよ．

(1) $exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\quad(x\neq 0)$　(57　東農工大)

(2) $\log|x+\sqrt{x^2+A}|$　(59　東農工大)

(3) $x\cos x$　$T-61$

(4) $x\log(x^2+1)$　(62　九州大)

(5) $\dfrac{a^x}{\sqrt{x^2+a^2}}$　$N-61$

(6) $\log\dfrac{x-1}{x+1}$　$T-62$

(7) $\log\cos x$　(62　東商船大)

(8) $\sqrt{x^2+3x+5}$　(1　佐賀大)

(9) $e^{-x}\sin x$　(1　佐賀大)

(10) $\sin\dfrac{x}{a}$　(1　東農工大)

(11) $\log\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$　(1　山口大)

(12) $(1+x^2-x^4)^{\frac{1}{3}}$　(3　福井大)

6. 2　次の関数 y を x で微分せよ．

(1) $\dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right\}$　(55, 58　都立大)

(2) $\sin^{-1}5x$　(57　東農工大)

(3) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　(59　都立大)

(4) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　(59　東農工大)

(5) $\tan^{-1}ax$　(60　千葉大)

(6) $x\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　(62　東商船大)

(7) $(1+x^2)\mathrm{Tan}^{-1}x$　$N-1$

(8) $\sin^{-1}e^x$　(63　九州大)

(9) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$　(63　信州大)

(10) $\tan^{-1}\left(2\tan\dfrac{x}{2}\right)$　(2　九州大)

6. 3　次の関数 y を x で微分せよ．

(1) x^x　(57　東農工大　2　九州大)

(2) $x^{\frac{1}{x}}$　(61　東農工大)

(3) $a^{\sqrt{x}}$　(63　信州大)

(4) $\tan^{-1}x$　(3　北大)

(5) $\sec^{-1}x$　(3　北大)

(6) $\log(x+\sqrt{x^2+a})$　(3　北大)

6. 4　次の関数 y を x で微分せよ．　$x=\sin^3 t, y=\cos^3 t$　(54　都立大)

6. 5　次の関数 y から y', y'' を求めよ．
(1) $x=\dfrac{1}{1+t^2}, y=\dfrac{2t^2}{1+t^2}$　(57　秋田大)
(2) $x^2y+xy^2-2=0$　(61　熊本大)

6. 6　$F(x)=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x)\\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x)\end{vmatrix}$ について $F'(x)$ を求めよ．　(47　金沢大)

6. 7　次の関数の導関数を求めよ．　$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$　(53　東農工大)

6. 8　$f(x)=x^3$ のとき, $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ を満足する θ を求めよ. また, $\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ.　(56　北大)

6. 9　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}, x(t)=a(t-\sin t)$ のとき, $y(t)$ を求めよ.　(58　都立大)

6. 10　$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ の関数がある. なお, $f(0)=0$ とする. そのとき, $g(x)=f(x)\tan^{-1}x$ として $g'(0), g''(0)$ を求めよ.　(59　電通大)

6. 11　$f(x)=\sin^{-1}x$ のとき, 次の等式を示せ.　$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=0$　(60　山口大)

6. 12　次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x), f''(x)$ を求めよ.

(1) $f(x)=\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$　(2) $f(x)=\mathrm{Arcsin}x$　(63　東商船大)

6. 13　$y=2\sin 2\theta\cos\theta$ の導関数と $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ における微分係数を求めよ.　$T-1$

7　グラフ

7. 1　次の関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(1) $\sin^{-1}(1-x^2)$　(55　岡大)　(2) $x\exp(-x^2)$　(57　室蘭工大)

(3) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　(57　東農工大)　(4) $\dfrac{x^2}{2(x-3)}$　(59　佐賀大)

(5) $y=x(x-1)(x-2)$　(59　金沢大)　(6) $y=\dfrac{1}{\log x}$　(59　千葉大)

(7) $2\cos x+\cos 2x$　(62　東農工大)　(8) $\sqrt{1-x^2}$　$T-61$

(9) $y=x-[x]$　(63　千葉大)　(10) $e^{-x}\cos x$　(63　都立大)

(11) $\sinh x+\cosh x$　(63　都立大)　(12) x^2e^{-x}　(63　東農工大)

(13) $x\log x$　(1　都立科技大)　(14) $x^2\log x$　(1　都立科技大)

(15) $e^{-x}\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$　(2　都立大)　(16) $\dfrac{\log x}{x}$　(2　都立大)

(17) x^2e^x　(2　佐賀大)

7. 2　次の関数のグラフの概形を描け.　$r=|2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta|$　(63　千葉大)

7. 3　次の関数のグラフの概形を描け.

(1) $x=1-\dfrac{1}{t}, y=\dfrac{1}{t+1}$　(59　千葉大)　(2) $x=t^2-1, y=\dfrac{t}{t-1}$　(63　千葉大)

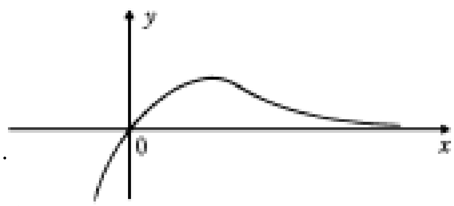
7. 4　次の関数 $y=f(x)$ の極大極小を求めよ.

(1) $e^x\sin x$　(63　熊本大)　(2) $x+\dfrac{1}{x-1}$　$T-2$

7. 5　曲線 $x^2+y^2=4x$ に, 傾き 3 で接する直線の方程式を求めよ.　(61　図情大)

7. 6　$y=e^x\sin x$ の極大・極小について論ぜよ.　(61　大分大)

7. 7　右のグラフの関数の導関数のグラフを描け.　$N-63$



7. 8　x の関数 $\begin{cases} x=\mathrm{Tan}^{-1}t \\ y=\log|t+\sqrt{t^2+1}| \end{cases}$ がある. y', y'' を求め, 凹凸を調べよ.

(2　東農工大)

8　最大・最小

8. 1　3 次元ユークリッド空間に点 $P_1(0,0,0), P_2(1,0,0), P_3(1,1,0), P_4(0,0,1)$ がある. いま P_1, P_2 を結ぶ直線を l_1, P_3, P_4 を結ぶ直線を l_2 とするとき, 平面 π を次のように定める.

(1) 点 $Q(1,-1,1)$ を通る.

(2) その π への l_1, l_2 の正射影が平行, あるいは 1 点と 1 直線になるようにする.

このような π のうち, 原点からの距離が最大となるものを求めよ. (53　東大)

8. 2　$f(x)=-x^3+ax$ について

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のときの $f(x)$ の最大値 M, 最小値 m を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ で $|f(x)|$ の最大値 M, 最小値 m を求めよ. (55　東北大)

8. 3　半径 a の球に内接する直円錐のうち, 体積最大のものを求めよ. (56　東工大)

8. 4　2 個の球の半径の和が一定値 a であるとき, その体積の和が最小となるときのそれぞれの半径を求めよ. また, このときの体積の和を求めよ. (57　図情大)

8. 5　$x^2+xy+y^2=1$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を x, y を使って求めよ.

(2) $z=xy$ とするとき, $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよ.

(3) z の最大値を求めよ. $N-57$

8. 6　関数 $f(x)=\sin 3x+3\sin x$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ を $\sin x$ の関数として表せ.

(2) 上の結果を用いて, 区間 $-\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ. $T-61$

8. 7　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\sin 2\theta \cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ. $N-62$

8. 8　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する長方形 (2 辺の長さを $2a, 2b$ とする) がある. 長方形の面積が最大となるときの $\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ. $T-62$

8. 9　(1) $f(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$ で $f(a)=0, 0<a<\dfrac{\pi}{2}$ の a は $\dfrac{\pi}{4}$ より大きいか小さいか理由をあげて説明せよ.

(2) $F(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x, 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ がある. $F(x)$ の最大値を求めよ.

(3) (1) の答えを a, (2) の最大値を M とした場合, $M+\dfrac{2}{\pi}a$ はどうなるか. (63　九州大)

8. 10　曲線 $y=e^x+1$ 上の任意の点を P とし, P を通る接線と x 軸との交点を Q, P から x 軸に下ろした垂線の足を R とする. P が曲線上を動くとき, $\triangle PQR$ の面積が最小値を取るときの点 P の座標および最小値を求めよ. (1　愛媛大)

8. 11　$x+2y=6$ のとき, $\log x+\log y$ が最大となる x, y の値および最大値を求めよ. (2　茨城大)

8. 12　半径 1 の球に内接する円柱の最大体積を求めよ. (2　愛媛大)

8. 13　$x^2+y^4=1$ のとき, $f(x,y)=x^3y^4$ の最大値, 最小値を求めよ. (2　阪大基)

8. 14　次の度数分布表が与えられている.

階級値 x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
度　数 f	f_1	f_2	$\cdots$	f_i	$\cdots$	f_n

全サンプルの平均値を $\bar{x}$, a を任意の定数とするとき, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 f_i$ を最小にする a の値を求めよ. $T-1$

9　微分の応用 (不等式)

9. 1　$\alpha>1, x>1$ のとき, 次の不等式を証明せよ.　$\alpha(x-1)<x^\alpha-1<\alpha x^{\alpha-1}(x-1)$ (55　岩手大)

9. 2　放物線 $x=1+\dfrac{y^2}{2}$ と楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とが交点をもつためには $a^2 \geqq 1$ でなければならないが, さらにこの 2 つの曲線が交点において直交するためには, a^2 の値はどのような範囲になければならないか. また, そのときの b^2 を a^2 で表せ. (55　東北大)

9. 3　$1-\dfrac{x^2}{2}<\cos x$　$\left(0<x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つことを証明せよ. (55　徳島大)

9. 4　$x-2\sin x=10$ において, 正根が少なくとも 1 つ以上存在することを証明せよ. (57　東農工大)

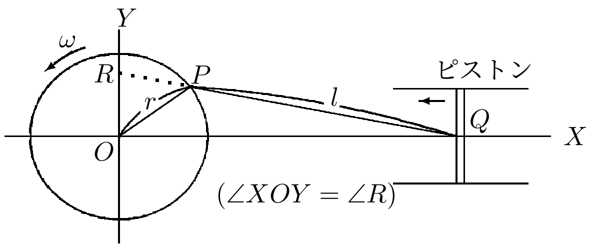
9. 5　中間値の定理を述べて証明せよ. (57　秋田大)

9. 6 (1) $\sin x<x$　$(0<x<2\pi)$　(2) $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x$　$\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を示せ. (58　金沢大)

9. 7　$1-\dfrac{x^2}{2!}<\cos x<1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$ を証明せよ. (61　熊本大)

10　微分の応用 (力学)

10. 1　ピストンの往復運動を円運動に変換する, 次図のようなクランク装置がある.



点 Q は直線 OX 上を動き, r は円の半径, l は線分 PQ でその長さは一定である. QP の延長と直線 OY との交点を R とすると, 点 P が半径 r の円周上を一定の角速度 ω で運動するとき, 点 Q の速度 v は $v = -\omega OR$ で与えられることを示せ.　(59　北大)

10. 2　平面座標上の点 P が原点 O から x 軸上を正方向に向かって一定の速度 v で進んでいる. y 軸上の点を $A(0, a)$ とし, $\angle OAP = \theta$ とする. 今点 P が $(3a, 0)$ 上にあるときの $\dfrac{d\theta}{dt}$ を求めよ.　(63　愛媛大)

11　n 次導関数

11. 1　次の関数 $f(x)$ の与えられた次数の導関数を求めよ.

(1) x^2e^x　(10)　(62　千葉大)　(2) $e^x \sin x$　(8)　(62　千葉大)

11. 2　次の関数 y の n 次導関数を求めよ.

(1) $x^2 \cos x$　(62　徳島大)　(2) $e^x \sin x$　(63　熊本大)

(3) $x^{n-1} \log x$　(53　室蘭工大)　(4) $x^3 \sin x$　(61　東商船大)

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$　(61　東商船大)　(6) $x \sin x$　(63　広島大)

11. 3　次の関数 $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで展開し, 初めの 3 項まで示せ.

(1) $\sin x$　(60　千葉大)　(2) $\sqrt[3]{1+x^2}$　(55　山梨大)

(3) $\log(1 + x + x^2)$　(49　東北大)　(4) $\sqrt{1+x}$　(49　東北大)

11. 4　関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ の $f^{(n)}(0)$ を求めよ.　(48　信州大, 63　名工大)

11. 5　関数 $f(x) = -x^3 \cos x$ を $x = 0$ のまわりで展開し, 初めの n 項まで示せ.　(63　信州大)

11. 6　すべての実数に対して $f'(x) = 0$ なるとき, $f(x) =$ 定数であることを証明せよ.　(52　広島大)

11. 7　すべての自然数 n に対して, 次の等式が成立することを証明せよ.　(53　東北大)

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

11. 8　$y = Cos^{-1}x$ がある. これについて答えよ.

(1) y' を求めよ.

(2) x, y', y'' の関係式を表す式を書け.

(3) $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$ を証明せよ.

(4) $x = 0$ のときの $y^{(n)}(0)$ を求めよ.　(54　東農工大)

11. 9　$y = \tan^{-1} x$ について, 次の問に答えよ.

(1) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$ を満たすことを示せ.

(2) (1) の両辺を n 回微分して, $y^{(n+2)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n)}$ の関係を示せ.

(3) (2) を用いて, $y^{(n)}(0)$ の値を求めよ.　(54　千葉大)

11. 10　テイラーの定理を使って, 次式を証明せよ.　(57　熊本大)

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

11. 11 (1) 関数 $y = \sin x$ のマクローリン展開における x^3 の項まで求めよ.

(2) (1) を利用して, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - (a + bx + cx^2)}{x^3} = d$ $(d \neq 0)$ なる a, b, c, d を求めよ. (59　広島大)

11. 12　$y = f(x)$ が点 $x = a$ を含むある区間内で $(n+1)$ 回微分可能であるとき, 次式を証明せよ.

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(60　東工大, 1　名大)

11. 13　不等式 $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4}$ を証明せよ. (61　熊本大)

11. 14　$y(x) = Sin^{-1} x$ がある. 次の問に答えよ.

(1) グラフを簡略に記せ.

(2) y' と y'' を求めよ.

(3) $(1 - x^2) y^{(n+2)}(x) - (1 + 2n) x y^{(n+1)}(x) - n^2 y^{(n)} = 0$ を数学的帰納法で証明せよ.

11. 15　$f_n(x) = \dfrac{1}{n! 2^n} \{(x^2 - 1)^n\}^{(n)}$ とする.

(1) $2n$ 次の多項式 $(x^2 - 1)^n$ の k 次の項の一般式を書け.

(2) $f_n(0)$ を求めよ.

(3) $\dfrac{f_{n+2}(0)}{f_n(0)}$ を求めよ. (62　東北大)

11. 16　$F_n(x) = exp(-x^2 + x)(exp(x^2 - x))^{(n)}$ とする.

(1) $(exp(x^2 - x))' = (2x - 1) exp(x^2 - x)$ を n 回微分して $F_{n+1}(x) = (2x - 1) F_n(x) + 2n F_{n-1}(x)$ を示せ.

(2) $F_n'(x) = 2n F_{n-1}(x)$ を示せ.

(3) $F_n''(x) + (2x - 1) F_n'(x) - 2n F_n(x) = 0$ を示せ. (63　東商船大)

12　近似式

12. 1　$x \fallingdotseq 0$ のとき, 次の近似式を示せ.

(1) $\log(1 + x) \fallingdotseq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ (47　秋田大)

(2) $\sqrt{1 - x + x^2} \fallingdotseq 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{8}$ (56　東農工大)

(3) $e^x \cos x \fallingdotseq 1 + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{6}$ (2　茨城大)

12. 2　次の関数 $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで展開し, x の 3 次式で近似せよ.

(1) $\sqrt[3]{1 + x}$ (55　山梨大) (2) 4^x (55　山梨大)

12. 3　$-1 < x < 1$ のとき, $(1 + x)^m$ を x の n 次の整式で近似せよ. (56　東理大)

12. 4　$f(x) = \cos x$ で, $\cos x$ の近似式が $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ とするとき, 誤差が $\dfrac{x^6}{6!}$ より小さくなることを示せ.(58　熊本大)

12. 5　関数 $\dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$ について, x が十分小さいときの近似式を求め, 次に $x \to 0$ の極限を求めよ. (58　佐賀大)

12. 6　$|x|$ が小さいとき, $\sin x$ を $x - \dfrac{x^3}{3!}$ と近似したときの誤差が $\dfrac{|x|^5}{5!}$ 以内になることを証明せよ. (60　熊本大)

12. 7　$0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された三つの関数

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \ g(x) = \cos x, \ h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

について,

(1) $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ であることを証明せよ.

(2) 三つの関数のグラフの概形を一つの図にまとめて書け.

(3) $\cos x$ の近似式として $1 - \dfrac{x^2}{2}$ を採用したとき, $0 \leqq x \leqq 0.2$ での誤差は, およそいくら以下であるかを概算せよ.

(63　図情大)

13　テイラー展開

13. 1　次の等式を証明せよ．

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$ (61　佐賀大)

13. 2　次の関数を $x=0$ のまわりで展開せよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (56　広島大)　(2) $\sin^{-1} x$ (56　広島大)

(3) $\log(1+x)$ (54　秋田大)　(4) $\sin x$ (1　東農工大)

13. 3　次の関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ．その収束域を求めよ．

(1) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (51　信州大)　(2) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ (52　電通大)

(3) $\log(1-x)$ (58　広島大)　(4) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ (58　広島大)

(5) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ (58　広島大)　(6) $\log(1+x)$ (60　東農工大)

(7) $\sin 3x + x\cos 2x$ (63　東商船大)

13. 4　$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ について

(1) $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(2) マクローリン展開を求めよ． (52　信州大)

13. 5　$f(x) = \log(1+x)$ の n 次導関数および $x=0$ におけるテーラー展開を求めよ． (58　徳島大)

13. 6　次の等式を証明せよ．

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (|x| \leqq 1)$$

次にこの式を利用して円周率 π を精密に計算する方法を示せ． (59　都立大)

13. 7　$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots \ (-1 < x \leqq 1)$ であることを用いて

(1) $-\log(t-1) + 2\log t - \log(t+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nt^{2n}}$ $(t>1)$ を示せ．

(2) $2\log 3 - 3\log 2$ を小数第三位まで計算せよ．$\left(\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{nt^{2n}} < \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{kt^{2n}}\text{に注意}\right)$ (60　東商船大)

13. 8　$f(x) = e^{\sqrt{3}x}\sin x$ とするとき，$f^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{6}\right)$ を示し，$f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．

(61　東商船大)

13. 9　$\sqrt{1-x}$ のマクローリン展開で x^2 の項まで求めよ． $N-61$

13. 10　$\log(1+x)$ のテイラー展開で，x^5, x^6 の係数はいくらか． $N-62$

13. 11　$f(x) = \dfrac{\log(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}}$ とする．

(1) $(1+x^2)f'(x) + xf(x) = 1$ を示せ．

(2) (1) の式を $n+1$ 回微分して，次の式を示せ．

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+3)xf^{(n+1)}(x) + (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0 \quad (n=0,\,1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

(3) $f^{(n)}(0)$ を求め，$f(x)$ をマクローリン展開せよ． (62　東商船大)

13. 12　関数 $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ について，次の問に答えよ．

(1) グラフの概形を示せ．

(2) これを級数展開し，それが収束するような x の範囲を示せ．

(3) $f'(x)$ の級数展開を示し，それが収束するような x の範囲を示せ． (62　図情大)

13. 13　関数 $f(x)$ のテイラー展開 (マクローリン展開) を書け． (62　東農工大)

13. 14　つぎのものを行え．

(1) $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー展開をせよ．

(2) e^x の $x=0$ におけるテイラー展開をせよ．

(3) $\cos x$ の $x=0$ におけるテイラー展開をせよ． (62　宮崎大)

13. 15　関数 $\sin x$ の *Taylor* 展開が, 次式で表されることを用いて, 関数 $\cos x$ の *Taylor* 展開を求めよ.　(63　都立大)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

13. 16　$\sin\dfrac{\theta}{2} \neq 0$ のとき, 下の関係が成り立つ x, y を求めよ.

$$\sin(k\theta) = \frac{\sin(x\theta)\sin(y\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

(1　阪大基)

13. 17 (1) $\dfrac{1}{1-t}$ のテイラー展開を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x$ であることと (1) の結果を利用して $\tan^{-1} x$ のテイラー展開をせよ.　(2　東農工大)

13. 18　次の関数のマクローリン展開を求めよ. (5 項まで)　(2　東農工大)

(1) $\cos x$　(2) $sec\, x$　(3) $\dfrac{\sin x - x}{x^2}$　(4) $\tan^{-1} x$　(3　東北大)

14　総合問題

14. 1　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ において,

(1) 傾き m の接線の方程式 $y = mx + c$ の c を a, b, m の式で表せ.

(2) 直交する 2 接線の交点の軌跡を求めよ.

(3) 楕円に外接する長方形の最大面積を求めよ.　(55　東大)

14. 2　正の数 z に対する正の三乗根 $\sqrt[3]{z}$ を数値的に求めるための漸化式

$$x_n = x_{n-1} - F(x_{n-1})$$

を, $f(x) = x^3 - z$ とおいて, $f(x_0) > 0$ なる x_0 から始めて, 一般に

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$$

と x 軸との交点 $x = x_n$ を求めるとの方針の下に作れ. また, このとき, 数列 $\{x_n\}$ は単調に減少して, 所望の根 $\sqrt[3]{z}$ に収束することを証明せよ.　(60　図情大)

14. 3　関数 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ の逆関数の導関数を求めよ.　(2　名大)