第 6 章

偏微分法

1　偏微分

1. 1　次の関数 z を x および y それぞれについて偏微分せよ.

(1) $z=(x^2+y)^3$　$T-60$　(2) $z=\log(\sin x+\cos y)$　(61　東商船大)

(3) $z=Sin^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(61　東商船大)　(4) $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　$N-61$

(5) $z=\dfrac{y}{x^2+y^2+1}$　(62　東商船大)　(6) $z=\sin(x\cos y-y\sin x)$　(62　東商船大)

(7) $z=Tan^{-1}\dfrac{y}{2x}$　$N-2$

1. 2　次の関数を z とおくときの $z_{xx}+z_{yy}$ を求めよ.

(1) $tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　(55　大阪府大)　(2) $\log(x^2+y^2)$　(60 山口大, 60 徳島大, 60 1 広島大)

(3) $\log\sqrt{x^2+y^2}$　(60　都立大)　(4) $\log(x^2+y^2)$　(61　佐賀大)

(5) $x^3y+2x^2y^2+5xy^3$　(62　徳島大)　(6) $Tan^{-1}\dfrac{x}{y}$　(63　熊本大)

(7) $e^{ax}(\sin by+\cos by)$　(2　都立科技大)

1. 3　関数 $f(x,\,y,\,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ について $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ を求めよ.　(51　信州大,　60　熊本大)

1. 4　$z=e^xf(x+y)+e^{-x}g(x-y)$ のとき, $z_{xx}=z+2z_y+z_{yy}$ を証明せよ.　(50　電通大)

1. 5　$z=f(x,\,y)$ が $ax+by$ の関数として表されるとき, $bz_x=az_y$ が成り立つことを証明せよ.　(55　群馬大)

1. 6　$z=f(x,\,y)$ が連続 3 回微分可能かつ調和関数 $(z_{xx}+z_{yy}=0)$ であるとき, $u=yz_x-xz_y$ もまた調和関数であることを証明せよ.　(55　岡大)

1. 7　$\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cos xy$ を求めよ.　(57　明大)

1. 8　$u(x,\,y,\,z)=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}$ とするとき, $\triangle u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ を証明せよ.　(57　広島大)

1. 9　$x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ について, 次のものを求めよ.

(1) z_x　(2) z_y　(3) $(y-z)z_x+(z-x)z_y$　(59　東農工大)

1. 10　$z=f(r)$ を $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の 2 回偏微分可能な関数とするとき, $z_{xx},\,z_{xy},\,z_{yy}$ を求めよ.　(60　東商船大)

1. 11　$x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ において, 次の問に答えよ.

(1) $z_x,\,z_y$ を求めよ.

(2) $(y-z)z_x+(z-x)z_y=x-y$ を証明せよ.　(61　東農工大)

1. 12　$f(x,\,y)=x^3a^{\sin y}$ のとき, $f_x,\,f_y,\,f_{xy}$ を求めよ.　(63　信州大)

1. 13　$u(x,\,y,\,z)=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ であるとき,

(1) u_x を求めよ.

(2) $u_x+u_y+u_z=\dfrac{3}{x+y+z}$ となることを示せ. (2　茨城大)

2　合成関数の偏微分

2. 1　次の関数から $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.

(1) $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $x=t+\sin t$, $y=1-\cos t$ (56　電通大)

(2) $z=f(x,\,y)$, $x=g(t)$, $y=h(t)$ $N-63$

2. 2　次の関数から z_u, z_v を求めよ.

(1) $z=x^2+y^2$, $x=2u-v$, $y=u+2v$ (56　電通大)

(2) $z=xy$, $x=\log\sqrt{u^2+v^2}$, $y=\tan^{-1}\dfrac{u}{v}$ (63　東農工大)

2. 3　$z=f(x,\,y)$, $x=u+v$, $y=uv$ のとき, 次式を証明せよ. (52　茨城大)

$z_{uv}=z_{xx}+xz_{xy}+yz_{yy}+z_y$

2. 4　z が x と y の関数で, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ であるとき, 次式を証明せよ.

$z_{xx}+z_{yy}=z_{rr}+\dfrac{z_{\theta\theta}}{r^2}+\dfrac{z_\theta}{r}$ (57　山梨大　58　熊本大)

2. 5　z が x と y の関数で, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ であるとき, 次式を証明せよ.

$(z_x)^2+(z_y)^2=(z_r)^2+\dfrac{(z_\theta)^2}{r^2}$ (57　秋田大　58　熊大)

2. 6　$u=2x+3y$, $v=4x-5y$, $z=f(u,\,v)$ があるとき, z_u, z_v を z_x, z_y で表せ. (59　山口大)

2. 7　$z=f(x,\,y)$, $x=\cos\phi-\rho\sin\phi$, $y=\sin\phi+\rho\cos\phi$ のとき, 次の等式を証明せよ.

$z_{xx}+z_{yy}=z_{\phi\phi}+z_{\rho\rho}$ (59　熊本大)

2. 8　$z=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+2y^2}$ であれば, $z_{xx}+\dfrac{z_{yy}}{2}=f''(r)+\dfrac{f'(r)}{r}$ が成立することを示せ. (1　愛媛大)

3　連続と偏微分

3. 1　$f(x,\,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,\,y)\neq(0,\,0)) \\ 0 & (x=y=0) \end{cases}$ について

(1) $f_x(0,\,0)$ を求めよ.

(2) この関数は原点において連続か否かを調べよ. (53　東農工大)

3. 2　$f(x,\,y)=\dfrac{\log|ax^2+by^2-1|}{x^2+y^2}$ のとき,

(1) $\displaystyle\lim_{y\to0}\{\lim_{x\to0}f(x,\,y)\}$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}f(x,\,y)$ が存在するための必要十分条件を a, b の関係式で表せ. (55　岡大)

3. 3　$\triangle u=\displaystyle\lim_{h\to0}\dfrac{u(x-h,\,y)+u(x,\,y+h)+u(x+h,\,y)+u(x,\,y-h)-4u(x,\,y)}{h^2}$ を示せ. ただし, $\triangle u=u_{xx}+u_{yy}$.

(59　千葉大)

3. 4　$f(x,\,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,\,y)\neq(0,\,0)) \\ 0 & ((x,\,y)=(0,\,0)) \end{cases}$ について, 原点における連続性と偏微分可能性を調べよ. (59　金沢大)

3. 5　$f(x,\,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(e^{x^2}-e^{y^2})}{x^2+y^2} & ((x,\,y)\neq(0,\,0)) \\ 0 & ((x,\,y)=(0,\,0)) \end{cases}$ とする.

(1) $f_x(x,\,y)$ および $f_y(x,\,y)$ を求めよ.

(2) $f_x(0,\,0)$, $f_y(0,\,0)$ を求めよ.

(3) $f_{xy}(0,\,0)$, $f_{yx}(0,\,0)$ を求めよ. (60　山口大)

4　偏微分の応用 1(最大・最小)

4. 1　次の関数 $f(x,\,y)$ の極値を求めよ.

(1) $x^4-x^3-y^3+3x^2y$　(49　東農工大)　(2) $x^3-2x^2y+x^2-y^2$　(50　東工大)

(3) $x^3+2x^2y-xy^2-4xy$　(52　東工大)　(4) $x^4+y^4-2x^2-2y^2-4xy$　(53　東工大)

(5) $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$　(56　東農工大)　(6) $x^3+3xy+y^3$　(57, 60　東農工大)

(7) $xy(1-x^2-y^2)$　(61　東農工大)　(8) $x^3+8y^3+12axy\quad(a\neq 0)$　(62　熊本大)

(9) $xy(x+2y-6)$　(62　東農工大)　(10) $x^3+2x^2y+xy^2-4xy$　(63　東工大)

(11) $4x^3-y^3+3x^2y+9y$　(63　東商船大)　(12) $x^2-xy+y^2-3x+y-2$　(63　信州大)

(13) $x^4+y^4-3(x-y)^2$　(1　東工大)　(14) $x(1-x^2-y^2)$　(1　東農工大)

4. 2　次の関数 $f(x,\,y)$ の極値を求めよ.

(1) $(x^2+2y^2)exp(-x^2-y^2)$　(58　山口大)　(2) $x exp(-x^2-y^2)$　(60　電通大)

(3) $\sin x+\sin y+\sin(x+y)\quad(0<x,\,y<\pi)$　(1　熊本大)

4. 3　$f(x,\,y)=x^3-3xy+y^3$ について

(1) テーラー展開を利用して $F(x,\,y)=f(x+h,\,y+k)-f(x,\,y)$ を $h,\,k$ の 2 次式で示せ.

(2) 極値を求めよ.　(50　東農工大, 50　山梨大)

4. 4　$f(x,\,y)=\begin{vmatrix}\sin x & 0 & \sin y\\ 1 & 1 & -\cos y\\ -\cos x & 1 & 1\end{vmatrix}$ の極値を求めよ.　(50　岡大)

4. 5 (1) $x^2+xy+y^2=3$ より $y',\,y''$ を求めよ.

(2) y の極値を求めよ.

4. 6　$f(x,\,y)=x^3-3axy+y^3$ のとき,

(1) $f(x,\,y)$ の極値を求めよ.

(2) $f(x,\,y)=0$ の極値を求めよ.　(54　山梨大)

4. 7 (1) $f(x,\,y)=\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2}+\sin\sqrt{x^2+y^2}$ が極値をもつのは $(x,\,y)=(0,\,0)$ のときだけであることを示せ.

(2) $x\leqq\sin x+\dfrac{x^2}{2}$ を示せ.

(3) $f(x,\,y)$ は $(x,\,y)=(0,\,0)$ で極小値となることを示せ.　(55　電通大)

4. 8　$x^2+y^2-2xy-2y-1=0$ できまる x の関数の最大値, 最小値を求めよ.　(56　東農工大)

4. 9　$f(x,\,y)=x^2+ay+by^2+cy^3$ が極値をもたぬ条件を求めよ.　(58　電通大)

4. 10　$f(x,\,y)=(x+y)^2+3\dfrac{x+y}{xy}$ の極値を求めよ.　(2　阪大基)

5　偏微分の応用 2(最大・最小)

5. 1　与えられた条件のもとに関数 f の最大値または最小値を求めよ.

(1) $x+y+z=9:f=xyz$　(59　佐賀大)

(2) $x^2+y^2=1:f=x^2+2xy+y^2$　(2　徳島大)

5. 2　$x^2+y^2+z^2\leqq 1$ における関数 $f(x,\,y,\,z)=x^2+y^2-xy+yz+zx$ の最大, 最小を求めよ.　(52　電通大)

5. 3　$x,\,y,\,z\geqq 0$ で $x+y+z=1$ とする. このとき $H(x,\,y,\,z)=-(x\log x+y\log y+z\log z)$ の最大値および最大となる $x,\,y,\,z$ を求めよ. ただし, log の底を 2 とする.　(60　東工大)

5. 4　$\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqq 1$ の範囲を $x,\,y$ が動くとき, $z=x+y+\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-y^2}$ の最大値および最小値を求めよ.　$N-60$

5. 5　正数 $m,\,n,\,p$ が与えられている. このとき, 与えられた正数 a を 3 つの正数 $x,\,y,\,z$ にわけて $x^my^nz^p$ が最大になるようにせよ.　(61　広島大)

5. 6　点 $(x,\,y)$ が $x^2+y^2=1$ 上を動くとき, $f=ax^2+2bxy+cy^2$ の最大値と最小値 λ は, 次の 2 次方程式の根である

ことを証明せよ. $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$　(2　熊本大)

5. 7　$0 \leqq x \leqq 1$ で $y=e^x$ を直線 $y=ax+b$ で近似したい. $I(a,\,b)=\displaystyle\int_0^1 \{e^x-(ax+b)\}^2 dx$ を最小にする $a,\,b$ の値を求めよ.　(2　東北大)

5. 8　x と y について次の測定結果が出た. x と y の関係を $y=ax+b$ で近似するとき, 最小二乗法で $a,\,b$ を定めよ.　(3　福井大)

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

5. 9　体積 $4,\,000\mathrm{cm}^3$ のふたのない箱を作る. 底面は一辺の長さが a, 高さ h とする. 材料を最小にするには $a,\,h$ をいくらにすればよいか.

5. 10　$x+y+z=a$ のとき, xyz の最大値を求めよ.　(3　福井大)

6　偏微分の応用 (図形)

6. 1 (1) $f(x,\,y)=x^3+y^3-3xy$ の極値を求めよ.

(2) $x=\pm 1,\,y=\pm 1$ を頂点とする四辺形の辺上の点 $(x,\,y)$ が変化すると, 関数 $f(x,\,y)$ はどのように変わるか.

(3) 集合 $D:|x| \leqq 1,\,|y| \leqq 1$ における $f(x,\,y)$ の最大値, 最小値を求めよ.　(50　岡大)

6. 2　n 個の点 $P_i(x_i,\,y_i)$ があり, 点 $P(x,\,y)$ との各点間の距離の 2 乗の和が最小となる点はどんな点か.　$N-56$

6. 3　半径 a の球がある. この球に含まれる (外部にはみでない) 直円柱のうち, 表面積 S と体積 V の比 $\dfrac{S}{V}$ が最小となるものを求めよ.　$N-58$

6. 4　三角形の 3 辺の長さをそれぞれ $a,\,b,\,c$ とする. この三角形の内部の一点から, 3 辺に下ろした垂線の長さをそれぞれ $x,\,y,\,z$ とするとき, xyz の最大値を求めよ.　(58　図情大)

6. 5　縦, 横, 高さが $x,\,y,\,z$ の直方体がある. $x,\,y,\,z$ の和は 6 で, 表面積は 18 である.

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) 直方体の体積の最大のものを求めよ.　(59　東大)

6. 6　表面積 1 の直方体の最大体積を求めよ.　(60　東工大)

6. 7　平面上の四角形 $ABCD$ がある. 辺 $AB=10,\,BC=5,\,\angle D=\dfrac{\pi}{3}$ のとき, この四角形の面積が最大となるときの $\angle B$ を求め, その面積を求めよ.　(61　東大)

6. 8　半径 a の円の周上に 3 点 $P,\,Q,\,R$ がある. このとき 2 つのベクトル $\overrightarrow{PQ},\,\overrightarrow{PR}$ の内積の最小値を求めよ.　$N-61$

6. 9　直方体の辺 $x,\,y,\,z$ の和が一定 (k) のとき, 表面積の最大値を求めよ.　(62　都立大)

6. 10　3 点 $A,\,B,\,C$ があり, 点 $P(x,\,y)$ のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させたときの像を $A',\,B',\,C'$ とする.

$\triangle AA'P+\triangle BB'P+\triangle CC'P$　の面積が最小となるときの $P(x,\,y)$ を求めよ.　(63　東大)

6. 11　半径 r の定円に内接する三角形のうち, 三角形の面積が最大となるのは, 正三角形であることを示せ.　(1　阪大工)

6. 12　一辺の長さが 2 である正三角形の内部の点から, それぞれの辺に引いた垂線の長さを $x,\,y,\,z$ とする. このとき

$I=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$　の最小値を求めよ.　(1　電通大)

7　テイラー展開

7. 1　次の関数 $f(x,\,y)$ の $(0,\,0)$ における $x,\,y$ についてのテイラー展開を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$　(56　東工大)　(2) $e^{ax}\cos by$　(61　金沢大)

7. 2　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ のとき, $\dfrac{\Delta T}{T} \fallingdotseq \dfrac{\dfrac{\Delta l}{l}-\dfrac{\Delta g}{g}}{2}$ となることを証明せよ.　(62　三重大)

8　総合問題

8. 1　$\log\sqrt{x^2+y^2}=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ であるとき,

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(3) 与式を極座標で表し, xy 直交座標でそのグラフを描け.　(2　山口大)