第 7 章

重積分法

1　重積分の計算

1．1　次の 2 重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)dxdy$　(57　広島大)　(2) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{\pi}^1 \sin^2\pi y dy$　(61　熊本大)

(3) $\displaystyle\int_0^2 dx\int_0^x xy^2 dy$　(62　徳島大)

1．2　2 重積分 $\displaystyle\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x,\,y)dy$ の積分順序を変更せよ.　(56　東農工大)

1．3　次の 2 重積分を計算せよ.

(1) x^2+y^2　$D: x^2+y^2 \leqq 1,\ x+y \geqq 1$　(50　東工大)

(2) xy　$D: y \leqq \sqrt{x},\ y \geqq 0,\ x \leqq 1$　(58　東農工大)

(3) $x+y^2$　$D: 0 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{x+1}$　(60　東農工大)

(4) $1+x+y$　$D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$　(60　徳島大)

(5) $x\sqrt{y}$　$D: y \leqq 2x,\ y \leqq -x+3,\ y \geqq 0$　(60　都立大)

(6) xy　$D: x^2+y^2 \geqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ x-y+2 \geqq 0,\ y \geqq 0$　(62　横浜国大)

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　$D: 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq x$　(63　東農工大)

(8) x^2y　$D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$　(1　広島大)

(9) x　$D: x^2+y^2 \leqq 4,\ x+y \leqq 2$　(1　長崎大)

(10) x^2+y^2　$D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$　(2　千葉大)

1．4　次の関数を領域 D で 2 重積分せよ.

(1) $\sqrt{x}$　$D: x^2+y^2 \leqq x$　(50　電通大)

(2) $1-x^2-y^2$　$D: x^2+y^2 \leqq 1$　(53　東農工大)

(3) x^2+y^2　$D: x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$　(60　東工大)

(4) $1+x$　$D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0$　(60　東工大)

(5) xy　$D: x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$　(60　広島大)

(6) $e^{-(x^2+y^2)}$　$D: x^2+y^2 \leqq 1$　(61　千葉大)

(7) x　$D: x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0$　(62　佐賀大)

(8) xy　$D: x^2+y^2 \leqq 4,\ xy \geqq 0$　(62　宮崎大)

(9) y^2　$D: x^2+y^2 \leqq 1$　(63　熊本大)

(10) $\left(\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}\right)^2$　$D: x^2+y^2 \leqq a^2$　($p,\,q$ は定数)　(63　東工大)

(11) x^2　$D: x^2+y^2 \leqq 1$　(1　電通大)

1．5　次の関数を領域 D で 2 重積分せよ.

(1) $\sqrt{x^2+y^2}$　$D: x^2+y^2 \leqq a^2,\ x^2+y^2-2ax \geqq 0$　(52　東工大)

(2) $\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}$　$D: x^2+y^2 \leqq r^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$　(53　東工大)

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$　$D: x^2+y^2 \leqq 1$　(56　東農工大)

(4) $1+x^2+y^2$　$D: (x^2+y^2)^2 \leqq x^2-y^2,\ x \geqq 0$　(56　電通大)

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$　$D: x^2+y^2 \leqq 1$　(62　千葉大)

(6) $\sqrt{x^2+y^2}$　$D: (x-1)^2+y^2 \leqq 1$　(62　広島大)

(7) $\sqrt{x^2+y^2}$　$D: 2x \leqq x^2+y^2 \leqq 4$　(62　東農工大)

(8) $\sqrt{9-x^2-y^2}$　$D: x^2+y^2 \leqq 3x$　(63　信州大)

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$　$D: x^2+y^2 \leqq 1$　(2　東農工大)

(10) xy　$D: x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$　(2　都立科技大)

1. 6　次の関数を領域 D で 2 重積分せよ.

(1) $|x|$　$D: r \geqq a,\ r \leqq 2a\sin\theta$　(52　電通大)

(2) $|xy|$　$D: 2 \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 3$　(55　電通大)

(3) $\sin(x+y)$　$D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$　(59　東農工大)

(4) $\cos x$　$D: 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$　(63　熊本大)

1. 7　2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$　$D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ を計算せよ.　(57　東農工大, 58　2　熊本大)

1. 8　次の 2 重積分を計算せよ.

(1) y　$D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{\dfrac{x}{2}}+\sqrt{\dfrac{y}{3}} \leqq 1$　(59　東工大)

(2) x　$D: 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1$　(59　電通大)

(3) $(x-y)^2+(x+2y)^2$　$D: |x+y| \leqq 2,\ |x+2y| \leqq 1$　(61　熊本大)

(4) $(x+y)e^{x-y}$　$D: 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1$　(2　徳島大)

1. 9　3 重積分 $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)dxdydz$　$D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1$ を計算せよ.　(56　山梨大)

2　重積分

2. 1　2 変数 $x,\ y$ の関数 $z=\log\dfrac{1}{r},\ r=\sqrt{x^2+y^2}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $(x,\ y)=(0,\ 0)$ を除く任意の $(x,\ y)$ に対して, $z_{xx}+z_{yy}=0$ の関係を満たすことを示せ.

(2) $A=\{(x,\ y)|x^2+y^2 \geqq R^2\},\ R>0$ として $\displaystyle\iint_A zdxdy$ の値を求めよ.　$T-55$

2. 2　領域 $D: x^2+y^2 \leqq 2ax$ において 2 重積分 $\displaystyle\iint_D |xy|dxdy$ を求めよ. また領域 D を図示せよ.　(57　東農工大)

2. 3　$y=0,\ y=x,\ x+y=2$ で囲まれた領域 D で $f(x,\ y)=2xy$ のとき, $\displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を求めよ.　(57　徳島大)

2. 4 (1) 直交座標 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ に変換するときのヤコビアン $|J|$ を求めよ.

(2) (1) を利用して $\displaystyle\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$　(D は半径 a の円の内部)　を求めよ.　(58　東大)

2. 5　$z=2xy$ を $y=0,\ y=x,\ x+y=2$ で囲まれる三角形で積分せよ.　(58　徳島大)

2. 6　直交座標系 $O-xy$ が定義された平面において, 通常のように原点 O を極, Ox を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ を定める この極座標による方程式が　$r=a\cos 2\theta$　$(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4},\ a$ は正の定数)　である曲線について, 次の問に答えよ.

(1) 曲線の概形を書け.

(2) この曲線で囲まれる部分を D とするとき, 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy$ を求めよ.　$N-58$

2. 7　$f(x,\ y)$ は $x,\ y$ の連続関数とする. $t>0$ に対し $F(t)=\displaystyle\iint_{I_t} f(x,\ y)dxdy$,　$I_t=\{(x,\ y)|0 \leqq x \leqq t,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ とおくとき, $F'(t)$ を求めよ.　(59　広島大)

2. 8 不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ で表される平面の範囲を D とする (ただし, $a>0,\ b>0$ とする). 次の問に答えよ.

(1) 連続な関数 $f(x,\,y)$ に対し, D 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,\,y)dxdy$ を考える. この 2 重積分を変数変換 $u=\dfrac{x}{a},\ v=\dfrac{y}{b}$ により, $u,\ v$ に関する 2 重積分として表せ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ を求めよ. $N-59$

2. 9 $D: x=e^u\cos v,\ y=e^u\sin v$ で $0\leqq u\leqq 1,\ 0\leqq v\leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

(1) 点 $(x,\,y)$ は xy 平面上でどんな図形を描くか.

(2) ヤコビアン J を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ. (60 山口大)

2. 10 $I=\displaystyle\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy \quad D: x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ について次の問に答えよ.

(1) I を $r,\ \theta$ の極座標形式で示せ.

(2) I を実際に計算せよ. (61 東農工大)

2. 11 次の積分を計算せよ. $I=\displaystyle\iint_D max(x^2,\,y)dxdy \quad D: 0\leqq x,\ 0\leqq y,\ x+y\leqq 1$ (63 大阪府大)

2. 12 $\displaystyle\iint_D (x^2-y)dxdy$ を $0\leqq x\leqq y\leqq 1$ の範囲で求めよ. $N-2$

2. 13 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \quad D$:3 点 (0, 0), (0, 1), (1, 1) を頂点とする三角形の内部, を求めよ. (2 愛媛大)

2. 14 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy \quad D: x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 1$ を求めよ. (2 千葉大)

2. 15 $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{x-y}dxdy \quad D: 0\leqq x+y\leqq 1,\ 0\leqq x-y\leqq 1$ を求めよ. (2 徳島大)

2. 16 $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy \quad D: x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 1\leqq x^2+y^2\leqq 4$ を求めよ. (3 三重大)

2. 17 $\displaystyle\iint_D x^2 exp(x^2+y^2)dxdy \quad D: x^2+y^2\leqq 4,\ x\geqq 0$ を求めよ. (3 東北大)

3 広義積分

3. 1 次の関数を領域 D で 2 重積分せよ.

(1) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} \quad D: 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x$ (55 東工大)

(2) $(x+y)^{-\frac{3}{2}} \quad D: 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$ (58 電通大)

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad D: 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x$ (2 愛媛大)

3. 2 次の関数を領域 D で 2 重積分せよ.

(1) $\sin^{-1}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} \quad D: 0\leqq x,\ 0\leqq y,\ 0\leqq x+y\leqq \dfrac{\pi}{2}$ (56 東工大)

(2) $\cos\dfrac{x-y}{x+y} \quad D: 0\leqq x,\ 0\leqq y,\ 0\leqq x+y\leqq 1$ (57 東工大)

3. 3 次の関数を領域 D で 2 重積分せよ.

(1) $e^{-(x^2+y^2)} \quad D: x\geqq 0,\ y\geqq 0$ (62 千葉大)

(2) $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} \quad D: x^2+y^2\geqq 1$ (63 東農工大)

3. 4 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} \quad D: x^2+y^2\leqq a^2,\ (a,\,p$ は正数) が存在するか. 存在するならその値はいくらか. (59 金沢大)

3. 5 (1) $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を積分せよ.

(2) $\displaystyle\int_0^a\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dydx$ の積分の順序を変更して, この値を求めよ. (60 電通大)

4 $\displaystyle\int_0^{\infty} exp(-x^2)dx$

4. 1　次の積分値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ (1　電通大)

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ (56　広島大)

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} exp(-x^2)dx$ (57　山梨大)

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} exp(-x^2)dx$ $T-57$

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ (60　千葉大)

4. 2　次式を証明せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (56　岩手大)

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (1　名大)

4. 3　$\displaystyle Erf(x) = \int_0^{x} e^{-t^2} dt$ について

(1) $x=0$ においてテイラー展開し, 収束半径を求めよ.

(2) $Erf(1)$ の値を小数点以下第一位まで正確に求めよ. (55　東農工大)

4. 4　3 次元空間で曲面 $z = \dfrac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}$ がある. いま $(x,\, y)$ 平面上の領域 $\{(x,\, y)|x+y \leqq a\}$ で上記の曲面下の体積を $V(a)$ とする.

(1) $V(a)$ を積分の形で示せ.

(2) $V(a)$ を a で微分, その結果を最も簡単な形で表せ.　ただし, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ である. (56　理科大 (II) 数)

4. 5　D を無限領域 $x \geqq 0,\, y \geqq 0$ とするとき, $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$ を求めよ. (62　千葉大)

4. 6　次の問題に答えよ.

(1) 関数 $exp(-r^2)$ を図 1 のような半径 R の 4 分円の領域で 2 重積分 (面積積分) した結果 $I(R)$ を計算せよ.　(※ $dS = rd\theta dr$)

(2) 同じ関数を図 2 の正方形の領域で 2 重積分した値と $I(R)$ と $I(\sqrt{2}R)$ との大小関係を不等式で表せ.

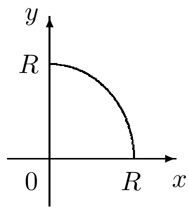


図 1

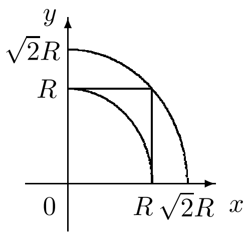


図 2

5　重積分の応用 (体積)

5. 1　次のいくつかの曲面・平面で囲まれた部分の立体の体積を求めよ.

(1) $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x},\, x=0,\, y=0,\, z=0,\, x^2+y^2 \leqq 1$ (50　山梨大)

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\, \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x}{a}$　$(a>b>c>0)$ (51　信州大)

(3) $x^2+z^2=a^2,\, y^2+z^2=a^2,\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, z \geqq 0$ (54　岡大)

(4) $x^2+y^2=z,\, y=z$ (60　熊本大)

(5) $z=x^2+y^2,\, z=2x+2y+1$ (56　東工大)

(6) $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2},\, x^2+y^2=1,\, z=0$ (59　山口大)

(7) $x^2+y^2=a^2,\, y^2+z^2=a^2,\, z^2+x^2=a^2$ (62　熊本大)

(8) $x^2+y^2+z^2=a^2,\, x^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ (1　東農工大)

5. 2　次の不等式の表す立体の体積を求めよ.

(1) $0 \leqq z \leqq 1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$　(55　東農工大)

(2) $x^2+y^2+z^2 \leqq 2,\ x^2+y^2 \leqq 1$　(58　熊本大)

(3) $x^2+y^2 \leqq 1,\ z \geqq -y,\ z \leqq 2y$　(60　東工大)

(4) $x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ x+y+z \geqq 1$　$N-61$

(5) $x^2+y^2 \leqq a^2,\ 0 \leqq z \leqq x+y$　(63　愛媛大)

(6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1$　(1　佐大)

(7) $x^2+y^2 \leqq ax,\ x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$　(1　徳島大)

(8) $x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq y$　$N-2$

5. 3　回転楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+z^2 \leqq 1$　$(0<a \leqq 1)$ の $z=-a$ から下の体積とそれを最大にする a を求めよ. (54　東大)

5. 4　曲面 $z=a-\sqrt{x^2+y^2}$ と 2 平面 $x=0,\ z=x$ で囲まれる立体の見取り図をかき, その体積を求めよ. (55　岡大)

5. 5　$x^2+y^2=z$ を図示し, $z=y$ とで囲まれる立体の体積を求めよ.　$N-56$

5. 6　$(x-2a)^2+y^2 \leqq a^2,\ |x|+|z| \leqq 1$ で囲まれた部分の立体の体積を求めよ. ただし, $0<3a \leqq 1$ とする.　$N-57$

5. 7　半径 a の球形の容器に水を入れて, 水の体積をその水が容器と接する面積で割った値が最大となる水深はいくらか.　(57　東大)

5. 8　半径 a の円柱が 2 つあって軸が直交している. このときの重なっている部分の体積を求めよ.　(57　1　熊本大)

5. 9　半径 r, 高さ h の円柱を右図 (略) のように 2 つの平面で切ったときできる刃形の立体の体積を求めよ. (60　東大)

5. 10　(1) $x^2+y^2=z$ が $2x^2+y^2=a^2$ で切り取られる曲面を描け.

(2) z を鉛直方向にとった場合に, 水の入る量を求めよ. ただし, 表面張力は考えないでよい.　$N-62$

5. 11　2 定点 $(0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ -1)$ からの距離の和が $2a$ であるとき (ただし $a>0$)

(1) 方程式を求め, 図形の概形を描け.

(2) 図形で囲まれる部分の体積を求めよ.　$N-1$

6　重積分の応用 (面積)

6. 1　次の曲面の表面積を求めよ.

(1) $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ の $x>0,\ y>0,\ x^2+y^2 \leqq 1$ の部分　(50　山梨大)

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z \geqq b$　$(0 \leqq b \leqq a)$　(57　山梨大)

(3) ドーナツ面 $x=(a+b\sin\theta)\cos\phi,\ y=(a+b\sin\theta)\sin\phi,\ z=b\cos\theta$　$(a>b>0)$　(1　東工大)

(4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　$(a,\ b,\ c>0)$　(1　佐大)

6. 2　直交座標系 $O-xyz$ において, 点 $A(a,\ 0,\ 0)$ と点 $B(-a,\ 0,\ 0)$ と点 P のなす角 $\angle APB=\alpha$　$(0<\alpha<\pi)$ が一定であるとして, この点 P が作る立体の表面積を求めよ.　(51　東大)

6. 3　(1) $x=au\cos v,\ y=bu\sin v$ が与えられているとき, ヤコビアン $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) (1) で求めたヤコビアン (関数行列式) を用いて, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のグラフの囲む図形の面積を求めよ.　$T-56$

6. 4　$x^2+y^2+z^2=a^2$ のとき, $z \geqq b$ の部分の曲面積を求めよ. ただし, $0<b<a$　$T-57$

6. 5　z 軸を軸とした無限に長い半径 1 の円柱がある. この円柱の $z \geqq 0,\ x+y+z \leqq 1$ の部分の側面積を求めよ.　(59　東大)

6. 6　直方体 $ABCD-EFGH$ において, 頂点 A を通る平面が $BF,\ CG,\ DH$ と交わる点をそれぞれ $B',\ C',\ D'$ とし, また $\angle BAB'=\alpha,\ \angle DAD'=\beta$ とすれば, 平行四辺形 $AB'C'D'$ の面積 S が

$S=ab\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$

で与えられることを証明せよ．ただし, $AB = a$, $AD = b$ である． (61　金沢大)

7　重積分の応用 (物理)

7．1　$y = x$ と $y = x^2$ とで囲まれた図形の重心を求めよ．ただし密度 ρ は一定とする． (50　岡大)

7．2　半径 a の半球面 $z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$ の重心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ を求めよ．ただし密度は一定とする． (60　東工大)

7．3　一様な密度をもち, 半径が a である半球体の重心の位置を求めよ． (63　北大)

8　総合問題

8．1　(1) $x^2 + y^2 \leqq a$, $z \leqq bx$, $z \geqq 0$ で囲まれる立体を図示せよ．

(2) その立体の体積を求めよ．

(3) その立体の表面積を求めよ．

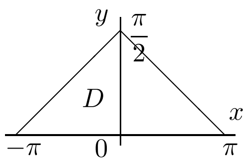
(4) 体積 V_0 と決められたとき, $z = bx$ 上の表面積を最大とするような a, b を求めよ． (51　東大)

8．2　$f(x, y) = \displaystyle\int_{x-2y}^{x+2y} g(t)dt$ とし, $g(t)$ は C^1 級とする．

(1) $f_x(x, 0)$, $f_y(x, 0)$ を求めよ．

(2) $f_{yy}(x, y) = Cf_{xx}(x, y)$ を満たす C の値を求めよ．

(3) $g(t) = \cos t$ として, 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ を求めよ．



(62　金沢大)

8．3　(1) $x = \dfrac{r}{a}\cos\theta$, $y = \dfrac{r}{b}\sin\theta$ のとき, ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = k$ のとき, $G = \displaystyle\iint_D f(a^2x^2 + b^2y^2)dxdy \quad D : x \geqq 0, y \geqq 0$ を求めよ．

(3) (2) において, $2a^2 + b^2 = 1$ を満たすとき G が最小の値をとる条件を求めよ． (3　金沢大)