第 9 章

応用数学

1　複素数

1. 1　次の複素数を $a+bi$　(a, b は実数) の形で表せ.

(1) $\exp\dfrac{i\pi}{3}$　(60　北大)　(2) $\exp\left(2-\dfrac{i3\pi}{2}\right)$　(60　北大)

(3) $e^{-\frac{i\pi}{6}}$　(58　佐賀大)　(4) $e^{\frac{i\pi}{6}}$　(61　佐賀大)

(5) $\sqrt{i}$　$N-61$　(6) $(1-\sqrt{3}i)^6$　$T-62$

1. 2　次の複素数を $re^{i\theta}$　(r, θ は実数) の形に表せ.

(1) $i+1$　(58　佐賀大)　(2) $1+\sqrt{3}i$　(61　佐賀大)

(3) -3　(60　北大)　(4) $\sqrt{3}+i$　(60　北大)

1. 3　x に関する方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ の 1 根が $1+\sqrt{2}i$ であることを知って, 実数 a, b を定め, 他の 2 根を求めよ.　(60　都立大)

1. 4　ドモアブルの定理 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$, $i=\sqrt{-1}$ を利用して $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ により表す公式を導け.　(60　都立大)

1. 5　$z(s)=\dfrac{1}{s^2+2bs+1}$ とする.

(1) $z(i\omega)$ の実部, 虚部, $|z(i\omega)|$ を求めよ.

(2) $|z(i\omega)|$ を ω の関数とするとき, この最大値とそのときの ω を求めよ.　(62　東北大)

1. 6　(1) 複素数 z, a, b がある. $|z-a|+|z+a|=2|b|$ を満足する z の存在する必要十分条件は $|a|\leqq|b|$ であることを証明せよ.

(2) $|z|$ の最大値・最小値を求めよ.　(63　京大)

1. 7　複素数平面上の点 P に i^3 を掛けたとき点 P は反時計方向に何度回転するか. ただし, $i^2=-1$.　$T-1$

1. 8　z を未知の複素数とするとき, 方程式 $z\bar{z}+2z=2i$ を満たす z を求めよ. ただし, $\bar{z}$ は z の共役複素数, $i=\sqrt{-1}$ である.　$T-1$

1. 9　$x^4-81i=0$ を解け.　(3　名大)

1. 10　$w=\dfrac{1}{z}$ のとき, $x^2+y^2=4$ は w 平面上でどのような図形に写像されるか. ただし, $z=x+iy$, $w=u+iv$　(3　福井大)

2　複素関数

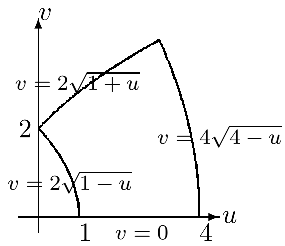
2. 1　写像 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$　($w=u+iv$, $z=x+iy$) によって図形 $|z|=2$ は w-平面上のどんな曲線に写るか.　(55　東大)

2. 2　$w=\cosh z$ によって, z 平面上の領域 $0<x$, $0\leqq y\leqq\pi$ は w 平面上のどんな領域に写るか. ただし, $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ とする.　(56　東大)

2. 3　$z=x+iy$, $w=u+iv$ として $w=z^2$ の写像を行うとき,

(1) z 平面上の直線 $x=a$, $y=b$ は w 平面上にどのように写像されるか. a, b が正, 0, 負の各々について求めよ.

(2) 右図の原像を z 平面上に図示せよ.　(60　東大)



2. 4　$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$(復号同順) の関係を用いて, 次の問に答えよ. ただし, $i^2=-1$.

(1) $\tan\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}$ を証明せよ.

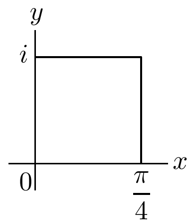
(2) $\sin\theta=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\theta^{2n+1}$ と展開するとき, a_n を求めよ.　$T-60$

2. 5　複素平面上で原点を中心とする半径 1 の円周のうち, 第一象限の内部にある点の集合を A とする. 集合 A に属する点 z に対して $w=\dfrac{z}{z+1}$ で表される点 w の集合を複素平面上に図示せよ.　$T-62$

2. 6　$w=f(z)=\sin z$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) $\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ を導け. ただし, $z=x+iy$

(2) 図の長方形 $\left(0,\,\dfrac{\pi}{4},\,\dfrac{\pi}{4}+i,\,i\right)$ の f による像を求めて図示せよ. ただし, $w=u+iv$　(63　東大)



2. 7　関数 $w=\dfrac{i(1-z)}{1+z}$ によって, $|z|<1$ なる領域はどう複素平面上に写されるか.　$T-2$

3　正則関数

3. 1　$u=\sin x\cosh y$ とする. $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ を満たす $v(x,\,y)$ を求めよ. ただし, $v(0,\,0)=0$ とする.(44　東北大)

3. 2　領域 D において正則な $f(z)$ の実部と虚部が相等しいという. このとき $f(z)$ は定数値となることを示せ.　(50　電通大)

3. 3　$u=-6x^2y+2y^3$ において, 第 2 の関数 $v(x,\,y)$ を定めて $w=u+iv$ が $z=x+iy$ に対して正則となるようにせよ.　(51　電通大)

3. 4　複素関数 $w=f(z)=(x^2+axy+by^2)+i(cx^2+dxy+y^2)$ が正則であるときの実定数 $a,\,b,\,c,\,d$ を求め, $f(z)$ を z で表せ.　(58　電通大)

3. 5　$f(z)$ は正則な関数である. $f(z)=u+vi$ で, $z=x+yi$ のとき,　$u+v=x^3+3x^2y-3xy^2-y^3-x^2+2xy+y^2+1$ ならば, u と v を $x,\,y$ で示せ. ただし, $f(0)=1$ とする.　(61　東大)

4　複素関数の積分

4. 1　次の関数を与えられた範囲ないし点でローラン展開せよ.

(1) $\dfrac{1}{z^2-(2-i)z-2i}$　(極で)　(56　電通大)　(2) $\dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$　$1<|z|<2$　(59　電通大)

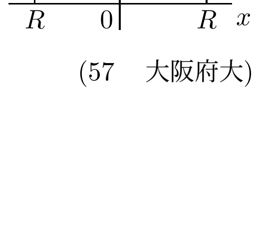
(3) $\dfrac{1}{z(z-1)^3}$　$0<|z-1|<1$　(60　電通大)　(4) $\dfrac{1}{z(z-1)^3}$　$|z|<1$　(60　電通大)

4. 2　複素積分 $\displaystyle\int_C\frac{dz}{(z+i)(z^2+1)}$　$C:|z+i|=1$ を求めよ.　(1　都立科技大)

4. 3　次の実数積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$　(52　電通大)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx$　(55　電通大)



4. 4　(1) $\dfrac{ze^{iz}}{1+z^2}$ の極 $z=i$ における留数 $Res[f,\,i]$ を求めよ.

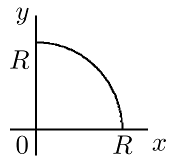
(2) 右の回路図を用いて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$ を求めよ.　(50　東農工大)

4. 5　複素関数 $f(z)=z^2$ を $0\to1\to1+i$ に沿うて積分せよ.　(57　大阪府大)

4. 6　$z=x+iy$ を複素数とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $z^4=-1$ を満たす z の値をすべて求めよ.

(2) 複素積分 $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$ を求めよ. この積分路 C は図に示す閉曲線とする.　$T-57$



4. 7　C : 単位円 ($|z|=1$) であるような C について, 複素積分 $\int_C \frac{dz}{(2z+1)(2z-1)^3}$ を行え.
(59　東大)

4. 8　複素関数 $f(z) = \frac{z-2}{(z-1)^3 z^2}$ において, 極, 位数, 留数を求めよ.　(61　電通大)

4. 9　$f(z) = e^z$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 実部と虚部を求めよ.

(2) u と v についてコーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示せ.

(3) $\int_C f(z)dz$ を求めよ. ただし, C は $|z|=1$ である.　(61　大分大)

4. 10　複素数の領域で $z = t^2 + it^3$　($i=\sqrt{-1}$, $0 \leqq t \leqq 1$) のとき, 線積分 $\int_C e^z dz$ を求めよ.　(63　電通大)

4. 11　複素積分を利用して, 積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ の値を求めよ.　(63　大阪府大)

4. 12　複素積分 $\int_{C_R} \frac{dz}{(z-8)(z-9)}$ の値を求めよ. ただし, C_R の経路は, $z=0$ を中心とし, $|z|=R$ とする円を正の向きに一周するものとし, R の値は, 8, 9 のいずれとも等しくないものとする.　(1　電通大)

4. 13　$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{9+x^2} dx$ を求めよ.　(3　福井大)

5　確率

5. 1　A, B, C 3 枚のコインがある. A を 4 回, B を 3 回, C を 2 回投げて, 表のでた回数を $(a,\ b,\ c)$ 回として, 次の確率を求めよ.

(1) $(a,\ b,\ c) = (2,\ 1,\ 2)$ となる確率

(2) $a < c \leqq b \leqq 2$ となる確率

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+b & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4-c \end{vmatrix} = 4$ とする. a, b, c のすべての組み合わせを求めよ

5. 2　w の間隔で平行線がある. この平行線と θ の角度になるように長さ l の針を落としたとき, 針が直線と交差する確率はいくらか. また, θ もランダムにした場合その確率はどうなるか. ただし, $w < l$ とする.　(57　東大)

5. 3　(1) 2 つのサイコロを同時に投げたときのそれぞれの目の数を m, n とするとき, $m^2 + 2n^2 \leqq 72$ となる確率を求めよ.

(2) お互いに独立な連続変数 x, y がそれぞれ $0 \leqq x \leqq 6$, $0 \leqq y \leqq 6$ の範囲で一様に分布するとき, $x^2 + 2y^2 \leqq 72$ となる確率を求めよ.　$T-57$

5. 4　送信側より受信側へ 2 種類の記号 1, 0 を送る通信系がある. 送信側は確率 0.6, 0.4 で送信する. 送信信号が 1 であるとき, 受信側では確率 0.9 で正しく 1 と受信し, 確率 0.1 で誤って 0 と受信する. また送信信号が 0 であるとき, 受信側では確率 0.95 で正しく 0 と受信し, 確率 0.05 で誤って 1 と受信する. 次の問に答えよ.

(1) 受信側である信号を受信したとき, それが 1 である確率を求めよ.

(2) 受信側で 1 を受信したとき, 送信信号が実際に 1 である確率を求めよ.　$T-58$

5. 5　A, B, C の 3 つの袋がある. A の袋には白球 8 個, 赤球 3 個, 青球 3 個, B の袋には白球 4 個, 赤球 7 個, 青球 4 個, C の袋には白球 7 個, 赤球 3 個, 青球 5 個がそれぞれ入っている. 今, ある袋から球を 1 つ取り出したとき, その球が白の場合には A の袋, 赤の場合には B の袋, 青の場合には C の袋から次に球を取り出す. 取り出した球は色を確認したら直ぐに元の袋に戻すものとする. 最初は A の袋から取り出すものとして, 次の問に答えよ.

(1) 3 回目に A の袋から球を取り出す確率 P_{A3} を求めよ.

(2) n 回目に A の袋から球を取り出す確率を P_{An} とする. $n > 1$ に対して, 次の関係式を満たす a, b, c, d, e, f, g, h, i の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} P_{An} \\ P_{Bn} \\ P_{Cn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} P_{A1} \\ P_{B1} \\ P_{C1} \end{pmatrix}$$

(3) 回が重なるにつれて, 白球を取り出す確率, 赤球を取り出す確率, 青球を取り出す確率はそれぞれある一定の値に近づくことが知られている．白球を取り出す確率はいかなる値に近づくか. $T-59$

5. 6　袋に白球 4 個と黒球 1 個が入っている．無作為に 1 球を取り出し, 色を確認して戻すという方法で 3 回取り出したとき, 白球が 1 回以上出る確率を求めよ. $T-60$

5. 7　サイコロを振って 1 か 6 である場合を A とすると, サイコロを 5 回振ったとき, 4 回以上 A が起きる確率を求めよ. $T-62$

5. 8　赤球 3 個 (当たりくじとする) 白球 7 個 (はずれとする) が袋の中に入っている．そのとき, 3 回ひいて始めて当たりくじが出る確率を求めよ. $T-63$

5. 9　平面上に等距離に平行線が引かれている．相隣る平行線の間隔を a とする．一辺の長さ $d\,(\sqrt{2}d < a)$ の正方形を上からこの平面に落とすとき, 正方形が平行線と交わる確率を求めよ. (63　東大)

5. 10　白球 $2N$ 個, 赤球 1 個が入っている袋から球を 1 個取り出しては戻し, これを N 回繰り返した場合, m 回赤が出る確率を $P_{m,\,N}$ とする.

(1) $P_{1,N}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} P_{1,N}$ を求めよ.

(3) $\dfrac{P_{m+1,N}}{P_{m,N}}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{P_{m+1,N}}{P_{m,N}}$ を求めよ. (1　阪大工)

5. 11　右図で, 次の問に答えよ.

(1) ねずみが 1 匹いたとする．入り口から入って出口から出ていく確率はいくらか.

(2) ねずみが 4 匹いるとき, 出口から出てくる確率はいくらか. (1　東大)

5. 12　赤球 3 個, 白球 7 個が袋に入っている．2 個取り出したとき, 赤 1 個, 白 1 個出る確率を求めよ.

5. 13　黒球 3 個, 白球 3 個が袋に入っている．続けて 2 個取り出すとき白球 2 個出る確率を求めよ. (3　福井大)

6　期待値と分散

6. 1　20 面体サイコロの 12 面を赤, 8 面を青でぬる．どの面も出る確率は等しい．いまこのサイコロを振り, 赤の出る回数 a を予想するゲームを考える．$a \geqq x$ のとき a 点, $a < x$ のとき 0 点とする．このとき, 得点の期待値が最大の a とそのときの期待値を求めよ. (56　東大)

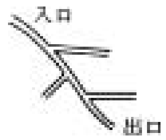
6. 2　(1) X_1, X_2 を確率変数とするとき, 期待値 $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ となることを証明せよ.

(2) サイコロを n 回投げるとき, 出る目の期待値を求めよ. (57　三重大)

6. 3　(1) 2 人がある勝負をするとき, 1 人が 2 回続けて勝つには何回試合をするか．その期待値を求めよ．ただし, 2 人の力は互角で引き分けはないものとする.

(2) 3 回続けて勝つという場合ではどうなるか. (59　東大)

6. 4　図のような迷路がある．鼠を入り口から入れる.



(1) 1 匹入れるとき, 出口から出てくる確率は幾つか.

(2) 3 匹入れるとき, 出口から出てくる鼠の数が 0, 1, 2, 3 のときのそれぞれの確率および平均と分散を求めよ.

(3) n 匹入れるとき, r 匹出てくる確率はどのように表されるか. (63　京大)

6. 5　確率 $\dfrac{1}{100}$ の籤がある．この籤に 1 回目に当たれば 1 万円, 2 回目に当たれば 2 万円, k 回目に当たれば k 万円の賞金が貰える．このとき, 次の問に答えよ．ただし, 籤の確率は常に $\dfrac{1}{100}$ とする.

(1) このときの期待値を求めよ.

(2) 毎回違う人が籤を引いた場合, 何番目の人が一番得か. 期待値より判断せよ. (2　阪大工)

6. 6　クラス 10 人の中で 4 人が眼鏡をかけている. 籤を引いて 10 人のうちから 3 人を選ぶとき, 眼鏡をかけている人が選ばれる人数を X とする. X は確率変数である.

(1) 眼鏡をかけている人の数を x とすると, $P(X=x)$ を求めよ.

(2) X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ. (2　九州大)

6. 7　(1) 赤球 3 個, 白球 2 個はいっている箱から 1 個取り出してもとにもどさないものとする. 2 回目に取り出すとき, 赤が出る確率を求めよ.

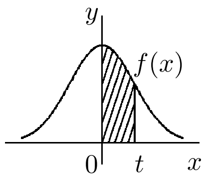
(2) (1) で 2 回目に赤が出る確率変数の平均値と分散を求めよ. (3　福井大)

7　確率関数

7. 1　確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ で表される分布を正規分布といい, $N(m,\,\sigma^2)$ と書く. ただし, 定数 m は平均値, σ は標準偏差を表す.

(1) 正規分布 $N(m,\,\sigma^2)$ に従う変数 x を $t=\dfrac{x-m}{\sigma}$ によって t に変数変換するとき, t は $N(0,\,1)$ に従うことを示せ.

(2) 500 人の生徒の平均身長が 151cm, 標準偏差が 15cm であるとする. 身長の分布が正規分布であるとして身長が 145cm から 154cm までの人数を求めよ. 右の表は $N(0,\,1)$ における t と斜線部の面積との関係を示す. 計算するときにはこの表を使用せよ.



t	面積
0.0	0.0000
0.1	0.0398
0.2	0.0793
0.3	0.1179
0.4	0.1554

(60　北大)

7. 2　確率密度関数が $x>0$ のとき, $f(x)=me^{-mx}\ (m>0)$, $x\leqq 0$ のとき, $f(x)=0$ で与えられる. 次の問に答えよ.

(1) 分布関数 $F(x)$ を求めよ. またそのグラフの概形を描け.

(2) 平均 μ, 分散 σ^2 を求めよ.

(3) 公衆電話での平均の待ち時間は 2 分である. ある人が既に 1 分待っているという. この人の残りの待ち時間は 2 分であることを示せ.

7. 3　確率分布がポワソン分布の形 $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ をしている. この分布の期待値と分散を求めよ (1　名大)

8　統計

8. 1　ある中学 1 年男子の体重を測るとき, 体重の標準偏差が 4kg のとき, 体重の平均値を ± 0.4Kg の範囲で推定するには, 何人について調査すればよいか. 95%の信頼度をもって推定せよ. ただし, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{1.96}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)dx=0.475$ とする. (57　図情大)

9　ベクトル解析

9. 1　$O-xyz$ なる座標系 S での z 軸を中心に α だけ回転させてできた座標系を $S':O-x'y'z'$ とし, 座標系 S' での y' を中心に β だけ回転させてできた座標系を $S'':O-x''y''z''$ とする. 次の問に答えよ.

(1) x'' 軸と y 軸とのなす角を θ とすれば, $\cos\theta$ はいくらか.

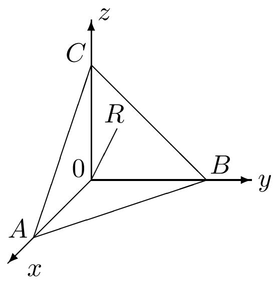
(2) 座標系 S'' での座標を $(x'',\,y'',\,z'')$ とするとき, それを座標系 $S(x,\,y,\,z)$ で表すと, その成分はどうなるか.

(3) 座標系 $S,\,S',\,S''$ のどれでも同じ座標の点 $(1,\,1,\,0)$ をそれぞれ $A,\,B,\,C$ とするとき, 四面体 $OABC$ の体積を求めよ. (57　東大)

9. 2　$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})+\overrightarrow{B}\times(\overrightarrow{C}\times\overrightarrow{A})+\overrightarrow{C}\times(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})=0$ を示せ. (57　埼玉大)

9. 3　図のように直交座標系 $(x,\,y,\,z)$ をとり, 座標軸上の点 $A(a,\,0,\,0)$, $B(0,\,b,\,0)$, $C(0,\,0,\,c)$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 点 $A,\,B,\,C$ を通る平面上の任意の点 $R(x,\,y,\,z)$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$ とし, この平面のベクトル方程式を導け.



(2) 同じ平面の方程式を $f(x,\, y,\, z) = 1$ と表すとき, 関数 $f(x,\, y,\, z)$ を求めよ.

(3) この平面に対する関数 $f(x,\, y,\, z)$ の勾配 $grad f$ と, 単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めよ.

(4) 三角形 ABC の面積ベクトル $\overrightarrow{s}$ とその大きさを計算せよ.　　　　$T - 58$

9. 4　質点の運動が $r = \cos\omega t\,\overrightarrow{i} + \sin\omega t\,\overrightarrow{j}$ という位置ベクトルで与えられている. 次の問に答えよ. ただし, ω は一定, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ は各々 x 軸, y 軸の方向の単位ベクトルである.

(1) 質点の速度 $\overrightarrow{v}$ は $\overrightarrow{r}$ に対して垂直であることを示せ.

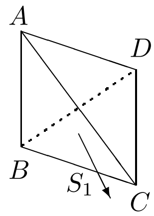
(2) 加速度 $\overrightarrow{a}$ の大きさと向きを求めよ.

(3) $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}$ は時間 t によらぬ一定のベクトルであることを示せ.　(59　北大)

9. 5　空間の極座標 $(r,\, \theta,\, \phi)$, 長さ s を助変数とする空間曲線が与えられているとき, その接線の $r,\, \theta,\, \phi$ 方向の方向余弦を $r,\, \theta,\, \phi,\, s$ で表せ.　(59　宮崎大)

9. 6　直交座標に関して, その方程式が　$x = t,\, y = t^2,\, z = t^3$　によって与えられる空間曲線上の点 $(t,\, t^2,\, t^3)$ を $P(t)$ とする. このとき, 4 点 $P(0)$, $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ $(0 < a < b < c)$ を頂点とする四面体の体積を求めよ.　(60　広島大)

9. 7　四面体 $ABCD$ の各頂点に対する面を表す外向きの面積ベクトル (面に直交した大きさが面積に等しいベクトル) を $\overrightarrow{S_1}$, $\overrightarrow{S_2}$, $\overrightarrow{S_3}$, $\overrightarrow{S_4}$ とする.



(1) 頂点 $A,\, B,\, C,\, D$ の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{D}$ とするとき,

$\overrightarrow{S_1} = \dfrac{(\overrightarrow{D} - \overrightarrow{B}) \times (\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B})}{2}$ であることを示せ

(2)　$\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3} + \overrightarrow{S_4} = O$　が成立することを証明せよ. ただし, $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ はベクトル $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ とのベクトル積を表すものとする.　(61　北大)

9. 8　$\phi(x,\, y,\, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ について $grad\phi$ および $\triangle\phi$ を求めよ.　(61　千葉大)

9. 9　∇ をベクトル微分演算子とする. すなわち $\nabla = \overrightarrow{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ とするとき, 次の (1), (2), (3) を求めよ. ただし, $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, $r = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする.

(1) ∇r　　(2) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)$　　(3) $\nabla(r^n)$　(63　北大)

9. 10　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるとき, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めよ. また A の $rank$ はいくらか.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) $\overrightarrow{a} = {}^t(1,\, 0,\, 0)$, $\overrightarrow{b} = {}^t(0,\, 1,\, 0)$, $\overrightarrow{c} = {}^t(0,\, 0,\, 1)$ とする. $A^{-1}\overrightarrow{a}$, $A^{-1}\overrightarrow{b}$, $A^{-1}\overrightarrow{c}$ を辺とする平行六面体の体積を求めよ.　(1　名大)

9. 11　空間内に 3 点 $P(1,\, 2,\, 3)$, $Q(2,\, 3,\, 1)$, $R(3,\, 1,\, 2)$ があり, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{v}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ と外積 $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ を求めよ.

(2) $\angle QPR$ の角度を求めよ.

(3) $\triangle PQR$ の面積を求めよ.

(4) 四面体 $OPQR$ の体積を求めよ.　(2　徳島大)

9. 12　空間に点 $A(2,\, 3,\, 0)$ と点 $B(0,\, 1,\, 2)$ と直線 $L : x = y = z$ があり, 点 P は直線 L 上を動く点である. 次の最小値を求めよ.

(1) $PA^2 + PB^2$　　(2) 内積 $(\overrightarrow{PA},\, \overrightarrow{PB})$　　(3) 外積 $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}$ の大きさ　(2　九州大)

10　フーリエ級数, 他

10. 1　関数　$|x|$　$(-\pi \leqq x \leqq \pi)$　のフーリエ級数を求めよ.　(61　大分大)

10. 2　(1) 区間 $[-\pi,\, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ のフーリエ級数を $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$ とするとき,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$ が成り立つことを示せ.

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)=|\sin ax|$ のフーリエ級数を求めよ. ただし, a は実数とする. (53　茨城大)

10. 3　方程式 $u_{xx}+u_{yy}=u$,　$r=0$ で $u=2$,　$r\to\infty$ で $u\to 0$　の解を求めよ.　(1　名大)

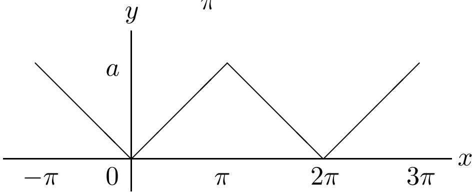
10. 4　波動方程式 $V_{xx}+V_{yy}=k^{-2}V_{tt}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 直交座標を極座標に変換 (すなわち $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$) したとき, $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ と $\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ との関係を示せ.

(2) このことを用いて上の波動方程式を極座標に直せ.　(62　北大)

10. 5　$f(x)=|x|$　$(-\pi\leqq x\leqq\pi)$ のフーリエ級数展開を利用して $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$ の和を求めよ.　(1　長崎大)

10. 6　次の図で表される関数 $f(x)=\dfrac{a}{\pi}|x|$　$-\pi\leqq x\leqq\pi$ をフーリエ級数展開せよ.　(3　福井大)



10. 7　次の図より $V(t)$ を含んだ微分方程式を示せ. ただし, $V(0)=V(t)$ とする.

(1) 電圧 e_0 対電圧 e_i の伝達関数を求めよ.

(2) ステップ入力 $U(t)$ をしたとき, 微分方程式をラプラス変換で解け.