数学アラカルト

第１回　連分数と１次不定方程式

§１　割算の答から数を当てる

２桁の整数を勝手に２つ選んでください。それを a，b とします。電卓を使って、a÷b を計算し、その答を知らせてくれれば、２つの数 a，b を当てることができます。

では、試してみましょう。　（2，3　試行する）

どうやって２つの数 a，b を当てることができるのか、その種明かしをします。

例えば、a＝19 ，b＝41 のとき、 $\frac{19}{41}=0.4634146\cdots$ となりますから、

$x=0.4634146$ が知らされたとします。　$x \fallingdotseq \frac{19}{41}$　であり、　$0<x<1$　より $\frac{1}{x}>1$　です。

$\frac{1}{x}$＝2.1578948＝整数部分 ＋ 小数部分＝c_1+x_1　とおくと、　$c_1=2$，x_1＝0.1578948

ここで、　$\frac{1}{x} \fallingdotseq \frac{41}{19}=2+\frac{3}{19}$　より　$x_1 \fallingdotseq \frac{3}{19}$　です。　同じ操作を繰り返します。

$\frac{1}{x_1}$＝6.3333308＝整数部分 ＋ 小数部分＝c_2+x_2　とおくと　$c_2=6$，x_2＝0. 3333308

そして、　$\frac{1}{x_1} \fallingdotseq \frac{19}{3}=6+\frac{1}{3}$　より　$x_2 \fallingdotseq \frac{1}{3}$　です。

$\frac{1}{x_2}$＝3.0000228＝整数部分 ＋ 小数部分＝c_3+x_3　とおくと　$c_3=3$，x_3＝0. 0000228

$\frac{1}{x_2} \fallingdotseq 3$ だから　$x_3(>0) \fallingdotseq 0$　であり、$\frac{1}{x_3}$＝43859.649 は大きな数になるので、ここで計算をやめます。

以上のことを続けて書くと次のようになります。

$$x=\frac{1}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{c_1+x_1}=\frac{1}{c_1+\frac{1}{\frac{1}{x_1}}}=\frac{1}{c_1+\frac{1}{c_2+x_2}}=\frac{1}{c_1+\frac{1}{c_2+\frac{1}{\frac{1}{x_2}}}}=\frac{1}{c_1+\frac{1}{c_2+\frac{1}{c_3+x_3}}}\fallingdotseq\frac{1}{c_1+\frac{1}{c_2+\frac{1}{c_3}}}$$

この最後の分数(**連分数**といいます)を普通の分数になおせば、a， b の値が求まります。

$$\frac{1}{2+\frac{1}{6+\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{19}}=\frac{19}{41}$$ ですから、 a ＝19 ， b ＝41　です。

例題　1.　２桁の数÷２桁の数 を電卓で計算したところ、1.3283582 になりました。２桁の数は何でしょうか。

解答　$x=1.3283582=1+x_1$ とおく。$c_1=1$，$x_1 \fallingdotseq 0.328352$ 。

c_2+x_2 ＝ $\frac{1}{x_1}$ ＝ $3.0454546=3+0.0454546$　より　$c_2=3$，$x_2 \fallingdotseq 0.0454546$

c_3+x_3 ＝ $\frac{1}{x_2}$ ＝ $21.999973=21+0.999973$　より　$c_3=21$，$x_3 \fallingdotseq 0.999973$

c_4+x_4 ＝ $\frac{1}{x_3}$ ＝ $1.000027=1+0.000027$　より　$c_4=1$，$x_4 \fallingdotseq 0.000027$

$\frac{1}{x_4}$=37037.037　は大きな数であるから（x_4は小さな数であるから）、ここで打ち切る。

よって、

$$２桁の数÷２桁の数=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{1}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{22}}=1+\frac{22}{67}=\frac{89}{67}$$

問題1．2桁の数÷2桁の数を電卓で計算したら，次のような値になりました．2桁の数はそれぞれいくつといくつでしょう.

(1) 3.2380952　　(2) 2.3235294　　(3) 0.45714286　　(4) 0.46753247

§2　互除法と連分数

２つの正の整数 $a,\ b\ (a>b)$ が与えられたとき、$a=b_0$， $b=b_1$ とおき、$b_0 \div b_1$ を整数部分と小数部分の和に直します。

$$\frac{a}{b}=\frac{b_0}{b_1}=整数部分+小数部分=c_1+\frac{b_2}{b_1} \qquad このとき、\quad b_0=b_1c_1+b_2\ \ (0\le b_2<b_1)$$

同様に $b_1 \div b_2$ を変形します。

$$\frac{b_1}{b_2}=整数部分+小数部分=c_2+\frac{b_3}{b_2} \qquad ここで、\quad b_1=b_2c_2+b_3\ \ (0\le b_3<b_2)$$

新しくできる分数の分母はどんどんと小さくなりますから、この操作を続けていくといつかは

$$\frac{b_{k-1}}{b_k}=整数=c_k\ ,\quad b_{k-1}=b_kc_k$$

となります。このような計算を（ユークリッドの）**互除法**といいます。

このとき、b_k は $a,\ b$ の最大公約数（greatest common divisor ； gcd）になります。$b_k=\mathrm{gcd}(a,\ b)$

また、以上の計算により、$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b_0}{b_1}$ の連分数表示が得られます。

$$\frac{a}{b}=\frac{b_0}{b_1}=c_1+\frac{b_2}{b_1}=c_1+\cfrac{1}{\cfrac{b_1}{b_2}}=c_1+\cfrac{1}{c_2+\cfrac{b_3}{b_2}}=\cdots\cdots=c_1+\cfrac{1}{c_2+\cfrac{1}{c_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{c_k}}}}$$

例題 2． 559 と 234 の最大公約数：gcd(559, 234) を求めよ。また、$\dfrac{559}{234}$ を連分数で表せ。

解答

	559	234	2
	468	182	
2	91	52	1
	52	39	
1	39	13	3
	39		
	0		

$559=234\times2+91$, $234=91\times2+52$, $91=52\times1+39$, $52=39\times1+13$, $39=13\times3$
より、gcd(559, 234) ＝ 13 である。

$$\frac{559}{234}=2+\frac{91}{234}=2+\cfrac{1}{\cfrac{234}{91}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{52}{91}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{91}{52}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{39}{52}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{52}{39}}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{13}{39}}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

問題２. ユークリッドの互除法によって, 次の２つ数の最大公約数を求めよ.

(1) 253 と 184　　　(2) 522 と 203

(3) 697 と 255　　　(4) 671 と 517

例題 3. $\dfrac{102}{75}$を連分数で表せ.

解答

	102	75	1
	75	54	
2	27	21	1
	21	18	
3	6	3	2
	6		
	0		

$$\frac{102}{75}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

問題３. 次の分数を連分数で表せ.

(1) $\dfrac{11}{8}$　　(2) $\dfrac{18}{7}$　　(3) $\dfrac{41}{15}$　　(4) $\dfrac{61}{47}$

ここで、互除法より得られる一般的な結果を述べておこう。

公式　$\dfrac{a}{b}=c_1+\cfrac{1}{c_2+\cfrac{1}{c_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{c_k}}}}$ のとき $c_1+\cfrac{1}{c_2+\cfrac{1}{c_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{c_{k-1}}}}}=\dfrac{y}{x}$ とおけば、

$$ax-by=(-1)^k$$

例題２の場合は

$\dfrac{559}{234}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$, $\dfrac{y}{x}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\dfrac{12}{5}$ よって $559\times5-234\times12=-13$

§3　１次不定方程式

例題 4.　１次不定方程式　43x－30y＝1　の整数解を１つ求めよ。

解答　$\dfrac{43}{30}=1+\dfrac{13}{30}=1+\dfrac{1}{\dfrac{30}{13}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{4}{13}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{13}{4}}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4}}}$

であるから、　$1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}=1+\dfrac{3}{6+1}=1+\dfrac{3}{7}=\dfrac{10}{7}$　より　$x_1=7$，$y_1=10$

検算　$43x_1-30y_1=301-300=1$

問題4. 次の1次不定方程式の整数解を1つ求めよ.

(1) $47x-10y=1$　(2) $45x-14y=1$　(3) $38x-29y=1$　(4) $43x-19y=1$

例題 5.　7x－5y＝1　の整数解を１つ求めよ。

解答　$\dfrac{7}{5}=1+\dfrac{2}{5}=1+\dfrac{1}{\dfrac{5}{2}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}$　であるから、　$1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$　より　$x_1=2$，$y_1=3$

検算　$7x_1-5y_1=14-15=-1$　であるから、$-x_1=-2$，$-y_1=-3$　が解になる。

例題 6.　7x－5y＝1　の整数解の一般解を求めよ。

解答　例題 4. より、$x_1=2$，$y_1=3$　のとき、　$7x_1-5y_1=-1$

この式と問題の式　$7x-5y=1$　との和をとると、　$7(x+x_1)-5(y+y_1)=0$，$7(x+x_1)=5(y+y_1)$

これより、$x+x_1=5t$，$y+y_1=7t$　とおける。よって　$x=5t-x_1=5t-2$，$y=7t-y_1=7t-3$

である。ここで、t は任意の整数である（一般解)。特に、t ＝1 とすれば、最小の正整数解　x＝3 ，y＝4　を得る。

例題 7.　41x－19y＝1　の整数解の一般解を求めよ。また、最小の正整数解を求めよ。

解答　$\dfrac{41}{19}=2+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{3}}$　であるから、　$2+\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{6}$　より　$x_1=6$，$y_1=13$　このとき、

$41x_1-19y_1=246-247=-1$　であるから、問題の式　$41x-19y=1$　との和をとると、

$41(x+6)-19(y+13)=0$，$41(x+6)=19(y+13)$　これより、$x+6=19t$，$y+13=41t$　とおける。

よって　$x=19t-6$，$y=41t-13$　である。ここで、t は任意の整数である（一般解)。

特に、t ＝1 とすれば、最小の正整数解　x＝13 ，y＝28　を得る。

問題５．次の１次不定方程式の一般解を求めよ．また，最小の正整数解を求めよ．
(1) $35x-16y=1$　(2) $38x-11y=1$　(3) $91x-22y=1$　(4) $139x-97y=1$

最後に、１次不定方程式に関する一般的な結果をのせておこう。

定理　a，b は正の整数（a＞b＞0）とし、a，b の最大公約数 gcd(a，b) を d とする。
１次不定方程式 ax－by＝d は常に解をもつ。

定理　a，b，c は正の整数とし、gcd(a，b) ＝d，$a=a_1d$，$b=b_1d$，$\gcd(a_1, b_1)=1$ とする。
ax－by＝c が解をもつための必要十分条件は c＝kd （k は整数）であり、その一般解は

$$x=x_1+b_1t,\ y=y_1+a_1t\quad(t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots)$$

で与えられる。ここで x_1，y_1は、１次不定方程式 $a_1x-b_1y=k$ の１組の解である。

第１回　レポート問題

1. 2桁の分数(２桁の数÷２桁の数) を電卓で計算したところ、1.3191489 になりました。元の２桁の分数は何でしょうか。

2. $71x-29y=1$　の整数解をすべて求めよ。また、最小の正整数解を求めよ。