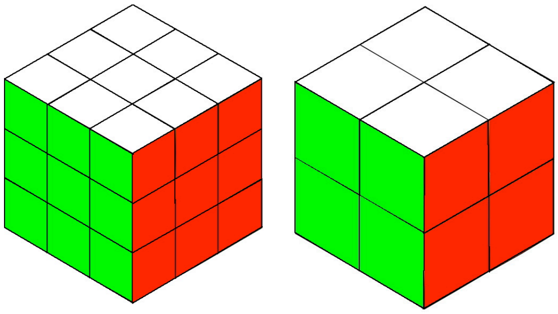
数学アラカルト第 6 回　ミニキューブの変換群

§1. ミニキューブの変換群

立方体(cube キューブ)の各辺を 3 等分して 27 個のピースに分けたものがルービックキューブ，2 等分して 8 個のピースに分けたものがミニキューブです．ルービックキューブの頂点にあるピースだけを見れば，ミニキューブの代用ができます．

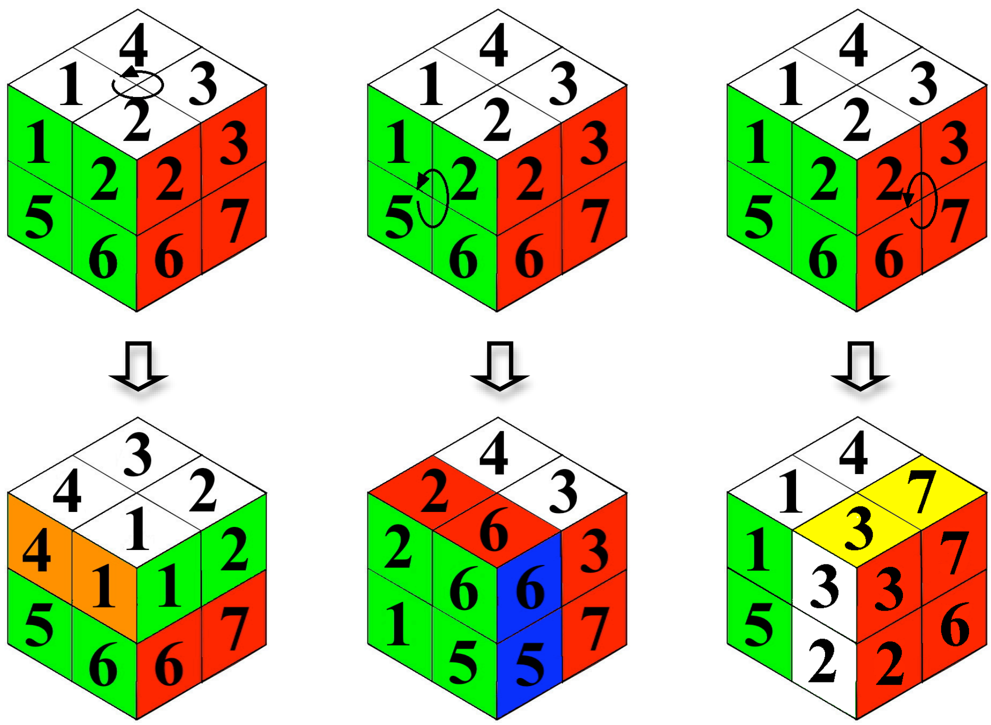


ミニキューブは上下左右前後それぞれ 4 つのピースを 90°回転させると色のパターンが変わります．これらの組み合わせがミニキューブの変換です．では，最初にこれらの変換でどうなるのか見てみましょう．

各ピースに数字を入れました．隠れて見えないピースが 8 です．ミニキューブのパズルを解くとき初めにミニキューブ全体を置き換えて, 8 のピースを正しい位置に置きます．その後は, 8 のピースを固定して, 1 から 7 のピースだけを移動する変換を考えます．

上段のピースを反時計回りに回転させる変換を T_1，左側面，右側面のピースを反時計回りに回転させる変換をそれぞれ T_2, T_3 とします．

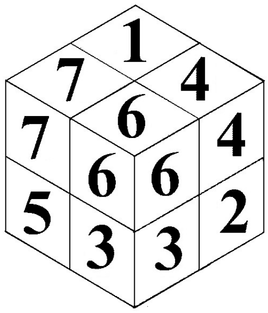
変換 T_1　　変換 T_2　　変換 T_3



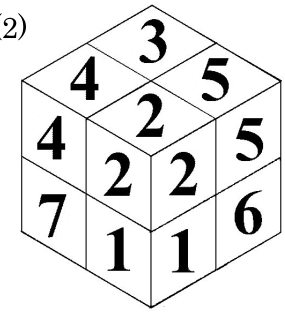
ミニキューブは完成形の位置にあってもピースが回転していると色が合いません．しかし，今回は簡単にするため，色(回転)は考えず，位置だけを考えることにします．従って，変換もピースの位置の変換であり，ピースの位置が揃ったらキューブは完成とします．

問題 1. ミニキューブが次の状態のとき，それぞれ 5 と 7 のピースを T_1, T_2, T_3 の変換を使って完成形の位置に移動しなさい．

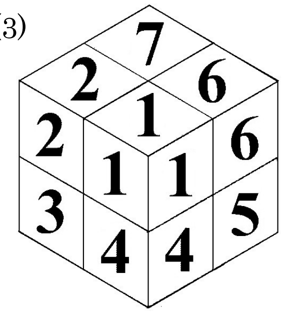
(1)



(2)



(3)



§2. 変換群(第 5 回のまとめ)

変換　パズル，ゲームなどの状態(パターン)を変える操作を変換といいます．

合成　変換を続けて行うものを変換の合成といい，　これも変換です．

変換群　変換の全体は合成で群(結合法則を満たし，単位元と逆元をもつもの)になり，変換群といいます．

群の位数　群 G に含まれる元の個数を G の位数といいます．

部分群　群 G の部分集合 H が群の 3 つの性質を持つとき, H を G の部分群といいます. H が部分群であるためには H が演算に関して閉じており，単位元を含み, H のすべての元について逆元を含んでいることが必要です．

例　7 パズルの変換群について 1(のピースの位置)を固定する変換

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

の全体は部分群になります．これを 1 の固定部分群といいます．

類別　群 G の部分群 H があるとき G をいくつかの部分集合に分けることがきます. $G = g_1H \cup g_2H \cup \cdots$. これを群 G の部分群 H による類別といいます．

例　G を 7 パズルの変換群, H_1 を 1 の固定部分群とします. $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ を数学アラカルト第 5 回の変換とすると

$G = \{1\to1$ の変換全体$\} \cup \{2\to1$ の変換全体$\} \cup \cdots \cup \{7\to1$ の変換全体$\}$

$= H \cup T_3H \cup T_3{}^2H \cup \cdots \cup T_3{}^6H$

これが G の H による類別です．

例題 1．ミニキューブの変換群を G，7 の固定部分群を H_7 とするとき，G の H_7 による類別を求めよ．

解答　問題 1 の答の変換は 7 のピースの移動を考えると(1)は(完成形の)1(の位置)→7(の位置)，(2)は 5→7，(3)は 4→7 の変換です．7 が他の 2，3，6 の位置にあっても T_3 を何度か使って完成形に移動できるので(T_3:6→7，$T_3{}^2$:2→7，$T_3{}^3$:3→7)，

$G = \{7\to7$ の変換全体$\} \cup \{6\to7$ の変換全体$\} \cup \cdots \cup \{1\to7$ の変換全体$\}$

$= H_7 \cup T_3H_7 \cup S_{(2)}H_7 \cup S_{(3)}H_7 \cup T_3{}^3H_7 \cup T_3{}^2H_7 \cup S_{(1)}H_7$

(ここで $S_{(1)}$, $S_{(2)}$, $S_{(3)}$ は問題 1(1), (2), (3)の変換とします)

問題 2. 7, 5 の固定部分群を $H_{7,5}$ とするとき，H_7 の $H_{7,5}$ による類別を求めよ．

(第 5 回のまとめ　その 2)

G の位数 ＝ 変換の総数 ＝ 完成形から変換によって変わるパターンの数

＝ 解けるパターンの数

例題 1 によって　G の位数 ＝ 7(類数 h_1)×H_7 の位数　すなわち，解けるパターンは 7 の位置によって 7 種類に分けられ，各類のパターンの数は 7 を正しい位置に移動した後の(7 を完成形の位置に固定して)解けるパターンの数 ＝ H_7 の位数となります．以後，問題 2 により 7 を固定して解けるパターンの数は 5 の位置によって類別され，類数 h_2×$H_{7,5}$ の位数(7, 5 を固定して解けるパターンの数)となります. その次は，$H_{7,5}$ の $H_{7,5,4}$ による類別を考えます.

§3. 変換の表し方

変換については 5 回で取り上げた様に上段に完成形，下段に変換で移動した位置を示して表します．ただし，今回は動かないものは省略します．

例

$$T_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&1&5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\ T_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&1&3&4&6&2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5&6\\5&1&6&2\end{pmatrix},$$

$$T_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&6&2&4&5&7&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&6&7\\6&2&7&3\end{pmatrix},$$

合成は変換の表示をつなげて 3 段にし，最後に上段と下段を残します．

逆変換は上下を入れ替えて，縦の列ごと移動して上段の順序を整えます．

$$T_1\cdot T_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&1&5&6&7\\1&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4&5&6\\3&4&5&6&2\end{pmatrix}\quad T_1^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&4&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\quad,$$

$$T_1^{-1}\cdot T_2\cdot T_1\cdot T_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&2&3&5&6\\4&5&1&3&6&2\\1&5&2&4&6&3\\2&1&6&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&1&6&3\end{pmatrix}$$

問題 3. 次の変換を表しなさい．

(1) $T_3\cdot T_2$　　(2) T_2^{-1}　　(3) $T_2^{-1}\cdot T_3\cdot T_2\cdot T_3^{-1}$　　(4) $T_3^{-1}\cdot T_1\cdot T_3\cdot T_1^{-1}$

§4　ミニキューブの変換の総数(変換群の位数)

ここまでのまとめ

・ G の位数(変換の総数)

＝ h_1(7 を正しい位置に戻せる位置の数)×H_7 の位数(7 を固定する変換の総数)

・ H_7 の位数

$= h_2$(5 を正しい位置に戻せる位置の数)×$H_{7,5}$ の位数(7,5 を固定する変換の総数)

・ $H_{7,5}$ の位数

$= h_3$(4 を正しい位置に戻せる位置の数)×$H_{7,5,4}$ の位数(7,5,4 を固定する変換の総数)

よって G の位数 $= h_1 \times h_2 \times h_3 \times H_{7,5,4}$ の位数

(h_1 は例題 1 より 7 であり, h_2 は問題 2 より求められます)

$H_{7,5,4}$ について

7,5,4 の固定部分群 $H_{7,5,4}$ は 1,2,3,6 の 4 つのピースだけを動かす変換の集合です.

$T_1^{-1} \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ や問題 3(3),(4)の変換は $H_{7,5,4}$ に属します. これらを使って $H_{7,5,4}$ を $H_{7,5,4,6}$ によって類別します → $H_{7,5,4}$ の位数 $= h_4 \times H_{7,5,4,6}$ の位数

例題 2. 次の変換を表し, $H_{7,5,4,6}$ に属することを示しなさい.

$(T_1^{-1} \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot T_2^{-1}) \cdot T_1 \cdot (T_2^{-1} \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_3^{-1})$

解答 $T_1^{-1} \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, 問題 3(3)より $T_2^{-1} \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

よって $\left(T_1^{-1} \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot T_2^{-1}\right) \cdot T_1^{-1} \cdot \left(T_2^{-1} \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_3^{-1}\right) \cdot T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

この変換は 1,2,3 だけを動かすので $H_{7,5,4,6}$ に属します.

問題 4. $X = (T_1^{-1} \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot T_2^{-1}) \cdot T_1^{-1} \cdot (T_2^{-1} \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_3^{-1}) \cdot T_1^{-1}$ とするとき, 次の変換を表し, $H_{7,5,4,6}$ に属することを示しなさい.

$T_1^2 \cdot X \cdot T_1$

$Y = T_1^2 \cdot X \cdot T_1$ とすると X, Y の合成や二乗, 逆変換等によって $H_{7,5,4,6}$ の変換をすべて決定することができます. これにより $H_{7,5,4,6}$ の位数が求められます.

最後にまとめると,

・ G の位数 $= h_1 \times h_2 \times h_3 \times h_4 \times H_{7,5,4,6}$ の位数

・ $h_1 = 7$(例題 1)

・ h_2 は問題 2 より求められる

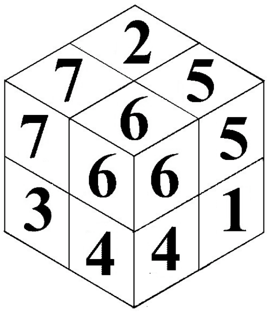
・ h_3 は h_1 や h_2 と同様にして求められる

・ h_4 は $T_1^{-1} \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot T_2^{-1}$ と問題 3(3),(4)の変換を使って求められる

・ $H_{7,5,4,6}$ の位数は X, Y により求められる

こうして, G の位数(= ミニキューブの変換の総数)が求められます.

問題5. ミニキューブが次の状態のとき, T_1, T_2, T_3(およびX,Y)の変換を使って完成しなさい.



その他の話

・ ピースの色の違い(回転)について

各ピースには3つの面があるので位置が揃ってもピースごとに0°（正位置).（右回り）120°, 240° の3通りづつの状態の違いが考えられます. ですから本来のミニキューブの変換群はこれも含めて考えることになります. 7ピース(ここでも8番は正位置で固定とします)ごとに3通りですから3^7倍になる可能性がありますが, 実際には各ピースの回転の総和が0° になりますから, 3^6倍になります.

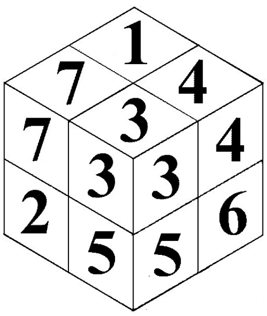
・ ルービックキューブの変換群について

ルービックキューブの場合は初めに述べたように頂点のピースだけの変換ならばミニキューブの変換とまったく同じです. ただし, ルービックキューブは各面の中心のピースが固定になるので8番のピースの移動と回転も考えなければなりません. それから各辺のピースどうしの移動と回転(180° づつ)を考えてから, その両方の組み合わせを考えることになります.

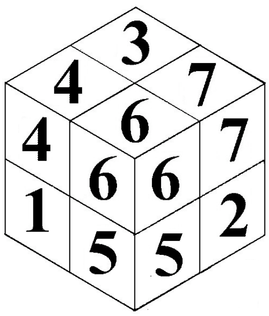
レポート課題1. 類数 h_3. h_4 と $H_{7,5,4,6}$ の位数を求めて, ミニキューブの変換群 G の位数を求めよ.

レポート課題2. ミニキューブが次の状態のとき, T_1, T_2, T_3(および X,Y)の変換を使って完成しなさい.

(1)



(2)



http://www.gifu-nct.ac.jp/sizen/okada/

メールアドレス　okada@gifu-nct.ac.jp