大日本図書　新基礎数学問題集　5 章§ 1 BASIC 詳しい解答

p.51. 5 章§ 1. 三角比とその応用　BASIC

249. 解答参照

250. (1) $\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

(2) $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

(3) $\dfrac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = -2-\sqrt{3}.$

251. (1) $\sin 84^\circ = \sin(90^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ$　(2) $\cos 52^\circ = \cos(90^\circ - 38^\circ) = \sin 38^\circ$

(3) $\tan 63^\circ = \tan(90^\circ - 27^\circ) = \dfrac{1}{\tan 27^\circ}$

252. 解答参照

253. AB 間の距離を xm とすると $\tan 11^\circ = \dfrac{153}{x}$. よって $x = \dfrac{153}{\tan 11^\circ} = \dfrac{153}{0.1944} = 787.03\cdots$. 答 787m

254. (1) $\sin 135^\circ \cos 45^\circ - \cos 135^\circ \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2+2}{4} = 1.$

(2) $\dfrac{\tan 150^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 150^\circ \tan 45^\circ} = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{1 + (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot 1} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{-(1+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{-(1+2\sqrt{3}+3)}{3-1} = -2-\sqrt{3}.$

(3) $\cos 150^\circ \cos 120^\circ + \sin 150^\circ \sin 120^\circ = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

255. (1) $\sin 97^\circ = \sin(180^\circ - 83^\circ) = \sin 83^\circ = 0.9925.$　(2) $\cos 156^\circ = \cos(180^\circ - 24^\circ) = -\cos 24^\circ = -0.9135.$

(3) $\tan 100^\circ = \tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ = -5.6713.$

256. (1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{7}{16}$. α 鈍角より $\cos\alpha < 0$. よって $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\dfrac{3}{\sqrt{7}} = -\dfrac{3\sqrt{7}}{7}.$

(別解)$\sin\alpha = \dfrac{3}{4} = \dfrac{Y}{r}$. $r = 4$ とすると $Y = 3$. 三平方の定理より $X^2 + Y^2 = r^2$ だから

$X^2 = r^2 - Y^2 = 4^2 - 3^2 = 7$. α 鈍角より $X < 0$ だから $X = -\sqrt{7}$. よって

$\cos\alpha = \dfrac{X}{r} = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}, \tan\alpha = \dfrac{Y}{X} = -\dfrac{3}{\sqrt{7}} = -\dfrac{3\sqrt{7}}{7}.$

(2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$. α 鋭角より $\cos\alpha > 0$. よって $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

(別解)$\sin\alpha = \dfrac{1}{3} = \dfrac{Y}{r}$. $r = 3$ とすると $Y = 1$. 三平方の定理より $X^2 + Y^2 = r^2$ だから

$X^2 = r^2 - Y^2 = 3^2 - 1^2 = 8$. α 鋭角より $X > 0$ だから $X = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. よって

$\cos\alpha = \dfrac{X}{r} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \tan\alpha = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

(3) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{11}{36}$. α 鈍角より $\sin\alpha > 0$. よって $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}} = -\dfrac{\sqrt{11}}{5}.$

(別解)$\cos\alpha = -\dfrac{5}{6} = \dfrac{X}{r}$. $r = 6$ とすると $X = -5$. 三平方の定理より $X^2 + Y^2 = r^2$ だから

$Y^2 = r^2 - X^2 = 6^2 - (-5)^2 = 11$. α 鋭角より $Y > 0$ だから $Y = \sqrt{11}$. よって

$\sin\alpha = \dfrac{Y}{r} = \dfrac{\sqrt{11}}{6}, \tan\alpha = \dfrac{Y}{X} = -\dfrac{\sqrt{11}}{5}.$

(4) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{4}{5}$. α 鋭角より $\cos\alpha>0$. よって

$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(別解 1)$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. よって $\cos\alpha=2\sin\alpha\cdots$①. $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ に①を代入して

$(2\sin\alpha)^2+\sin^2\alpha=1$ より $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{5}$. α 鋭角より $\sin\alpha>0$ より $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ①より $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(別解 2)$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}=\dfrac{Y}{X}$. α 鋭角より $X>0, Y>0$ だから $X=2$ とすると $Y=1$. 三平方の定理より

$r^2=X^2+Y^2=2^2+1^2=5$ だから $r=\sqrt{5}$. よって $\sin\alpha=\dfrac{Y}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha=\dfrac{X}{r}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(5) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{1+(-4)^2}=\dfrac{1}{17}$. α 鈍角より $\cos\alpha<0$. よって

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{17}}{17}\right)=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

(別解 1)$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $-4=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. よって $\sin\alpha=-4\cos\alpha\cdots$①. $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ に①を代入して

$\cos^2\alpha+(-4\cos\alpha)^2=1$ より $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{17}$. α 鈍角より $\cos\alpha<0$ より $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

①より $\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

(別解 2)$\tan\alpha=-4=\dfrac{Y}{X}$. α 鈍角より $X<0, Y>0$ だから $X=-1$ とすると $Y=4$. 三平方の定理より

$r^2=X^2+Y^2=(-1)^2+4^2=17$ だから $r=\sqrt{17}$. よって

$\sin\alpha=\dfrac{Y}{r}=\dfrac{4}{\sqrt{17}}=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}, \cos\alpha=\dfrac{X}{r}=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

257. (1) 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$. よって $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{3\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

(2) 正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$. よって $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $C=180^\circ-A-B=180^\circ-45^\circ-105^\circ=30^\circ$. 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$. よって

$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{2\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.

258. 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=2R$. よって $R=\dfrac{a}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

259. (1) 余弦定理より $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{3}\cos 30^\circ=16+27-24\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=43-36=7$.

よって $a=\sqrt{7}$.

(2) 余弦定理より $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=\sqrt{6}^2+(2\sqrt{3})^2-2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}\cos 135^\circ=6+12-12\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=30$.

よって $b=\sqrt{30}$.

(3) 余弦定理より $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. よって $\sqrt{7}^2=1^2+c^2-2\cdot 1\cdot c\cos 60^\circ=1+c^2-2c\cdot\dfrac{1}{2}$. $7=c^2-c+1$.

$c^2-c-6=(c+2)(c-3)=0$. $c=-2, 3$. $c>0$ より $c=3$.

260. 余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4^2+5^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{37}{40}$. $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{5^2+2^2-4^2}{2\cdot 5\cdot 2}=\dfrac{13}{20}$.

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2^2+4^2-5^2}{2\cdot 2\cdot 4}=-\dfrac{5}{16}$. (元の余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ に代入して求めてもよい.)

261. 余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4^2+5^2-a^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{41-a^2}{40}$. A が鋭角なら $\cos A>0$ より $\dfrac{41-a^2}{40}>0$.

よって $41-a^2>0$. $0<a<\sqrt{41}$. 条件 $a>1$ より $1<a<\sqrt{41}$.

262. (1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\sin 60^\circ=\frac{35}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{35\sqrt{3}}{4}$.

(2) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 45^\circ=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

263. $S=\frac{1}{2}ca\sin B$ より $7\sqrt{3}=\frac{1}{2}c\cdot 10\sin 30^\circ$. $7\sqrt{3}=5c\cdot\frac{1}{2}$. $c=\frac{14\sqrt{3}}{5}$.

264. (1) 余弦定理より $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4^2+5^2-7^2}{2\cdot 4\cdot 5}=-\frac{1}{5}$.

(2) $\cos^2 C+\sin^2 C=1$ より $\sin^2 C=1-\cos^2 C=1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}$. $\sin C>0$ より $\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

(3) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$.

(4) 正弦定理より $\frac{c}{\sin C}=2R$. よって $R=\frac{c}{2\sin C}=\frac{7}{2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\frac{35}{4\sqrt{6}}=\frac{35\sqrt{6}}{24}$.

265. (1) ヘロンの公式より $s=\frac{3+5+6}{2}=7$. $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}=2\sqrt{14}$.

(2) ヘロンの公式より $s=\frac{4+5+6}{2}=\frac{15}{2}$. $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}$

$=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

ヘロンの公式を忘れたときは問題 264 の手順 (1)〜(3) でも求められる.

p.53. CHECK

266. 解答参照

267. $\angle\mathrm{BA'A}=87^\circ$ だから $\tan 87^\circ=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'A}}=\frac{\mathrm{AB}}{10}$. よって $\mathrm{AB}=10\tan 87^\circ=10\times 19.0811=190.811$. 約 191m.

268. (1) $\sin 30^\circ\cos 60^\circ+\cos 150^\circ\sin 120^\circ+\sin 90^\circ\cos 135^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\frac{\tan 30^\circ+\tan 135^\circ+\tan 180^\circ}{1-\tan 120^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-1+0}{1-(-\sqrt{3})\cdot 1}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}(1-3)}$

$=-\frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\sin(90^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)-\cos(90^\circ-\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)=\cos\alpha(-\cos\alpha)-\sin\alpha\sin\alpha=-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=-1$.

269. $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ より $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}$. α 鈍角より $\sin\alpha>0$. よって $\sin\alpha=\frac{\sqrt{24}}{5}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}}=-2\sqrt{6}$.

(別解)$\cos\alpha=-\frac{1}{5}=\frac{X}{r}$. $r=5$ とすると $X=-1$. 三平方の定理より $X^2+Y^2=r^2$ だから

$Y^2=r^2-X^2=5^2-(-1)^2=24$. α 鈍角より $Y>0$ だから $Y=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. よって

$\sin\alpha=\frac{Y}{r}=\frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan\alpha=\frac{Y}{X}=\frac{2\sqrt{6}}{-1}=-2\sqrt{6}$.

270. $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ より $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+(-\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{5}$. α 鈍角より $\cos\alpha<0$. よって

$\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(別解 1)$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $-\frac{1}{2}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. よって $\cos\alpha=-2\sin\alpha\cdots$①. $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ に①を代入して

$(-2\sin\alpha)^2+\sin^2\alpha=1$ より $\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$. α 鈍角より $\sin\alpha>0$ より $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

①より $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(別解 2)$\tan\alpha = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{Y}{X}$. α 鈍角より $X < 0, Y > 0$ だから $X = -2$ とすると $Y = 1$. 三平方の定理より

$r^2 = X^2 + Y^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$ だから $r = \sqrt{5}$. よって

$\sin\alpha = \dfrac{Y}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha = \dfrac{X}{r} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

271. (1) $A = 180° - B - C = 180° - 105° - 45° = 30°$. 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$. よって

$R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sin 30°} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$. $c = 2R\sin C = 2\sqrt{6}\sin 45° = 2\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$.

(2) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 10\sin 120° = 25\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$.

余弦定理より $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 5^2 + 10^2 - 2\cdot 5\cdot 10\cos 120° = 25 + 100 - 100\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 175$.

よって $c = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$.

(3) 余弦定理より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 12^2 + 15^2 - 2\cdot 12\cdot 15\cos 60° = 144 + 225 - 360\cdot\dfrac{1}{2} = 189$.

よって $a = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}$. 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. よって $R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{3\sqrt{21}}{2\sin 60°} = \dfrac{3\sqrt{21}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt{7}$.

(4) 余弦定理より $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2\cdot 6\cdot 7} = \dfrac{1}{4}$.

$\cos^2 C + \sin^2 C = 1$ より $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{15}{16}$. $\sin C > 0$ より $\sin C = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{21\sqrt{15}}{4}$.

(5) ヘロンの公式より $s = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$. $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$= 84$. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ より $84 = \dfrac{1}{2}\cdot 14\cdot 15\sin A$. よって $\sin A = \dfrac{84}{\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15} = \dfrac{3}{5}$.

((4) のようにヘロンの公式によらない方法もある)

272. $BD^2 = BC^2 + CD^2 = \sqrt{3}^2 + 1^2 = 4$. よって $BD = 2\cdots$①.

$\triangle ABD$ の内角と外角の関係から $\angle ADB + \angle DAB = \angle DBC$ だから $\angle ADB = \angle DBC - \angle DAB = 30° - 15° = 15°$.

よって $\angle ADB = \angle DAB = 15°$ より $\triangle ABD$ は二等辺三角形だから①より $AB = BD = 2$. よって

$AC = AB + BC = 2 + \sqrt{3}\cdots$②. 三平方の定理より $AD^2 = AC^2 + CD^2 = (2+\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1 = 8 + 4\sqrt{3}$.

よって $AD = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\cdots$③.

②③より $\sin 15° = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \cos 15° = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

$\tan 15° = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$.