大日本図書　新微分積分 I 問題集　4 章§1 BASIC 詳しい解答

p.52. 4 章§1. 面積・曲線の長さ・体積　BASIC

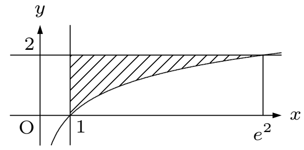
201. 積分する範囲 ⇒ 両端の x 座標を求める. 大きい方 (上の曲線) から小さい方 (下の曲線) を引いて積分.

(1) $y=x^2, y=x+2$ より $x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2,-1.$

2 と -1 の間の $x=0$ のとき $x^2=0, x+2=2 \Rightarrow 0<2$ より $-1 \leqq x \leqq 2$ で $x^2 \leqq x+2$. よって

$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2-\frac{-1}{3}\right)=\frac{9}{2}.$

(2) 1 つの端は $x=1$. もう 1 つは $y=\log x, y=2$ より $\log x=2 \Rightarrow x=e^2$.



$x=1$ のとき $\log x=\log 1=0<2$ より $1 \leqq x \leqq e^2$ で $\log x \leqq 2$. よって

$S=\displaystyle\int_{1}^{e^2}(2-\log x)dx=[2x-x\log x]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\left(-x\cdot\frac{1}{x}\right)dx$

$=(2e^2-e^2\log e^2)-(2-\log 1)+[x]_1^{e^2}=2e^2-2e^2-2+0+e^2-1=e^2-3.$

($\log x$ の積分に $1\cdot\log x$ として部分積分を使う)

202. (1) $y=x^2+x, y=x^3-x$ より $x^2+x=x^3-x \Rightarrow x^3-x^2-2x=x(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2,0,-1.$

-1 と 0 の間の $x=-\dfrac{1}{2}$ のとき $x^2+x=-\dfrac{1}{4}, x^3-x=\dfrac{3}{8} \Rightarrow -\dfrac{1}{4}<\dfrac{3}{8}$ より $-1 \leqq x \leqq 0$ で $x^2+xdx \leqq x^3-x$,

よって y 軸の左側の部分 $=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{(x^3-x)-(x^2+x)\}dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}=0-\left\{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)-1\right\}=\frac{5}{12}.$

0 と 2 の間の $x=1$ のとき $x^2+x=2, x^3-x=0 \Rightarrow 2>0$ より $0 \leqq x \leqq 2$ で $x^2+xdx \geqq x^3-x$.

よって y 軸の右側の部分 $=\displaystyle\int_{0}^{2}\{(x^2+x)-(x^3-x)\}dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=-4+\frac{8}{3}+4=\frac{8}{3}.$

(2) 図のように $y \geqq 0$ の部分だから $x^2+y^2=2$ について $y^2=2-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{2-x^2}$.

$x^2+y^2=2, y=x^2$ より $y+y^2=2 \Rightarrow y^2+y-2=(y+2)(y-1)=0 \Rightarrow y=-2,1.$ $y=x^2 \geqq 0$ より

$y=1 \Rightarrow y=x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1.$

-1 と 1 の間の $x=0$ のとき $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}, x^2=0 \Rightarrow \sqrt{2}>0$ より $-1 \leqq x \leqq 1$ で $\sqrt{2-x^2} \geqq x^2$.

$S=\displaystyle\int_{-1}^{1}(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx=2\int_0^1(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$(偶関数より)

公式 $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$ より $S=2\left[\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{2-x^2}+2\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1$

$=1+2\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}.$

203. (1) $y=x(x-1)(x-2), y=0$ (x 軸) より $x(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=0,1,2.$

0 と 1 の間の $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $x(x-1)(x-2)=\dfrac{3}{8}>0$ より $0 \leqq x \leqq 1$ で $x(x-1)(x-2) \geqq 0$.

1 と 2 の間の $x=\dfrac{3}{2}$ のとき $x(x-1)(x-2)=-\dfrac{3}{8}<0$ より $x(x-1)(x-2) \leqq 0$. よって

$S=\displaystyle\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx-\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2$

$=\dfrac{1}{4}-1+1-\left\{(4-8+4)-\left(\dfrac{1}{4}+1-1\right)\right\}=\dfrac{1}{2}.$

(2) $y=e^x, y=e^{-x}$ より $e^x=e^{-x} \Rightarrow e^{2x}=1 \Rightarrow x=0.$

-1 と 0 の間の $x=-\dfrac{1}{2}$ のとき $e^x=e^{-\frac{1}{2}}, e^{-x}=e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}}<1<e^{\frac{1}{2}}$. $-1 \leqq x \leqq 0$ で $e^x \leqq e^{-x}$.

0 と 2 の間の $x=1$ のとき $e^x=e, e^{-x}=e^{-1} \Rightarrow e>1>e^{-1}$. $0 \leqq x \leqq 2$ で $e^x \geqq e^{-x}$.

$S=\displaystyle\int_{-1}^{0}(e^{-x}-e^x)dx+\int_0^2(e^x-e^{-x}dx=[-e^{-x}-e^x]_{-1}^0+[e^x+e^{-x}]_0^2$

$=(-1-1)-(-e-e^{-1})+(e^2+e^{-2})-(1+1)=e^2+e+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^2}-4.$

204. 曲線の長さ $l=\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$

$y'=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},\ 1+(y')^2=1+\dfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{4+(e^{\frac{x}{2}})^2-2e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}+(e^{-\frac{x}{2}})^2}{4}=\dfrac{4+(e^{\frac{x}{2}})^2-2+(e^{-\frac{x}{2}})^2}{4}$

$=\dfrac{(e^{\frac{x}{2}})^2+2+(e^{-\frac{x}{2}})^2}{4}=\dfrac{(e^{\frac{x}{2}})^2+2e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}+(e^{-\frac{x}{2}})^2}{4}=\dfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2.$

$l=\displaystyle\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx=\dfrac{1}{2}\left[2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^2=(e-e^{-1})-(1-1)=e-\dfrac{1}{e}.$

205. (1) $y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x+1},\ 1+(y')^2=1+\dfrac{1}{4}(x+1)=\dfrac{x+5}{4}.$

$l=\displaystyle\int_{-1}^4\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{-1}^4\dfrac{1}{2}\sqrt{x+5}dx=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^4=\dfrac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{1}{3}(27-8)=\dfrac{19}{3}.$

(2) $y'=x^2+\dfrac{1}{4}(x^{-1})'=x^2-\dfrac{1}{4}x^{-2},\ 1+(y')^2=1+x^4-2x^2\cdot\dfrac{1}{4}x^{-2}+\dfrac{1}{16}x^{-4}=1+x^4-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16}x^{-4}$

$=x^4+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16}x^{-4}=x^4+2x^2\cdot\dfrac{1}{4}x^{-2}+\dfrac{1}{16}x^{-4}=\left(x^2+\dfrac{1}{4}x^{-2}\right)^2.$

$l=\displaystyle\int_1^3\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^3\left(x^2+\dfrac{1}{4}x^{-2}\right)dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^{-1}\right]_1^3=9-\dfrac{1}{12}-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)=9-\dfrac{1}{6}=\dfrac{53}{6}.$

206. $V=\displaystyle\int_a^b S(x)dx$. 三角錐の頂点を原点, 底面と垂直な方向に (底面に向かって正になるように)x 軸をとる.

x 軸と垂直な平面での断面は底面と相似で相似比 $x:10$ だから $S(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3x}{10}\cdot\dfrac{4x}{10}=\dfrac{3}{50}x^2.$

$V=\displaystyle\int_0^{10}\dfrac{3}{50}x^2dx=\left[\dfrac{1}{50}x^3\right]_0^{10}=\dfrac{10^3}{50}=20.$

207. $S(x)=x\sin x,\ V=\displaystyle\int_0^\pi x\sin xdx=[x(-\cos x)]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx=\pi+[\sin x]_0^\pi=\pi.$ (部分積分を用いた)

208. $V=\pi\displaystyle\int_a^b y^2dx$

(1) $V=\pi\displaystyle\int_1^{10}y^2dx=\pi\int_1^{10}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^{10}\dfrac{dx}{x^2}=\pi\left[\dfrac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{10}=\pi\left\{-\dfrac{1}{10}-(-1)\right\}=\dfrac{9}{10}\pi.$

(2) $y=\sqrt{x^2-4}, y=0$ (x 軸) より $\sqrt{x^2-4}=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x=\pm2.$

$y=\sqrt{x^2-4}$ の定義域は $x^2-4\geqq0\Rightarrow x\leqq-2, 2\leqq x$ だから回転体をつくる図形は $2\leqq x\leqq3$ にある.

$V=\pi\displaystyle\int_2^3y^2dx=\pi\int_2^3\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2dx=\pi\int_2^3(x^2-4)dx=\pi\left[\dfrac{x^3}{3}-4x\right]_2^3=\pi\left\{9-12-\left(\dfrac{8}{3}-8\right)\right\}$

$=\pi\left(5-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{7}{3}\pi.$

p.53 CHECK

209. (1) $y=x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}, y=-x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}\Rightarrow x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}-(-x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3})=2x^2-2x-4=0\Rightarrow$

$2(x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=2,-1.$ -1 と 2 の間の $x=0$ のとき $x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{8}{3}, -x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}.$

$-\dfrac{8}{3}<\dfrac{4}{3}$ より $S=\displaystyle\int_{-1}^2\left\{\left(-x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}\right)-\left(x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}\right)\right\}dx=\int_{-1}^2(-2x^2+2x+4)dx$

$=\left[-\dfrac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^2=-\dfrac{16}{3}+4+8-\left(\dfrac{2}{3}+1-4\right)=9.$

(2) $y=\dfrac{1}{x}, y=\dfrac{1}{4}x\Rightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}x\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2.$ 1 と 2 の間 $x=\dfrac{3}{2}$ のとき $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}x=\dfrac{3}{8}.$ $\dfrac{2}{3}>\dfrac{3}{8}.$

2 と 3 の間 $\dfrac{5}{2}$ のとき $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{4}x=\dfrac{5}{8}.$ $\dfrac{2}{5}<\dfrac{5}{8}.$ よって $S=\displaystyle\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4}x\right)dx+\int_2^3\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{x}\right)dx$

$=\left[\log|x|-\dfrac{1}{8}x^2\right]_1^2+\left[\dfrac{1}{8}x^2-\log|x|\right]_2^3=\log2-\dfrac{1}{2}-\log1+\dfrac{1}{8}+\dfrac{9}{8}-\log3-\dfrac{1}{2}+\log2$

$=2\log2-\log3+\dfrac{1}{4}.$

210. (1) $y'=\dfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x-1}.$ よって $l=\displaystyle\int_1^6\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^6\sqrt{1+\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{x-1}\right)^2}dx=\int_1^6\sqrt{\dfrac{9x-5}{4}}dx$

$=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_1^6\sqrt{x-\dfrac{5}{9}}dx=\dfrac{3}{2}\left[\dfrac{(x-\frac{5}{9})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^6=\left(6-\dfrac{5}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1-\dfrac{5}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{49}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{343}{27}-\dfrac{8}{27}=\dfrac{335}{27}.$

(2) $y'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}2x}{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$ よって

$$l=\int_2^3\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_2^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2}dx=\int_2^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}dx=\int_2^3\sqrt{\frac{x^2-1+1}{x^2-1}}dx$$

$=\displaystyle\int_2^3\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$ $x^2-1=t$ とおくと $2xdx=dt, xdx=\dfrac{1}{2}dt.$ $\begin{array}{c|ccc} x & 2 & \to & 3 \\ \hline t & 3 & \to & 8 \end{array}$

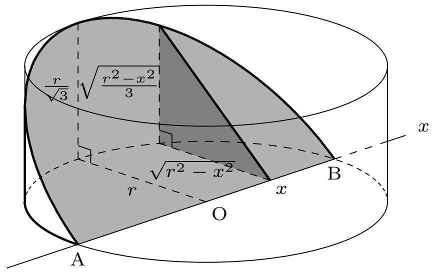
$$l=\int_3^8\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_3^8=\sqrt{8}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

211. AB を x 軸とし, AB の中点 O を原点, A$(r,0)$, B$(-r,0)$ とする.

求める部分の x 座標が x の地点で x 軸と垂直な平面による切り口の面積は図のように $S(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{\dfrac{r^2-x^2}{3}}=\dfrac{r^2-x^2}{2\sqrt{3}}.$

よってその体積 V は $V=\displaystyle\int_{-r}^{r}\frac{r^2-x^2}{2\sqrt{3}}dx=\frac{2}{2\sqrt{3}}\int_0^r(r^2-x^2)dx.$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[r^2x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(r^3-\dfrac{r^3}{3}\right)=\dfrac{2r^3}{3\sqrt{3}}.$



212. (1) $V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$

(2) $V=\pi\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x^2+1})^2dx=\pi\int_0^1(x^2+1)dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\pi\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi.$

213. (1) $y=x^2+1, y=2x^2\Rightarrow 2x^2-(x^2+1)=x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1.$ -1 と 1 の間の $x=0$ のとき $x^2+1=1, 2x^2=0.$

$1>0$ より $S=\displaystyle\int_{-1}^1(x^2+1-2x^2)dx=2\int -0^1(-x^2+1)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}.$

(2) $V=\pi\displaystyle\int_{-1}^1(x^2+1)^2dx=2\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)dx=2\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=2\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{56}{15}\pi.$

(3) (2) より $V=\pi\displaystyle\int_{-1}^1\{(x^2+1)^2-(2x^2)^2\}dx=\pi\int_{-1}^1(x^2+1)^2dx-\pi\int_{-1}^1(2x^2)^2dx=\frac{56}{15}\pi-2\pi\int_0^1 4x^4dx$

$=\dfrac{56}{15}\pi-2\pi\left[\dfrac{4}{5}x^5\right]_0^1=\dfrac{56}{15}\pi-\dfrac{8}{5}\pi=\dfrac{32}{15}\pi.$