大日本図書　新微分積分 I 問題集　4 章§ 2 STEPUP 詳しい解答

p.61. 4 章§ 2. いろいろな応用　STEPUP

251. (1) $v(t)=v(0)+\int_0^t (1-\sqrt{t})dt=0+\left[t-\dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^t=t-\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}.$

$x(t)=x(0)+\int_0^t \left(t-\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}\right)dt=0+\left[\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{2}{3}\dfrac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^t=\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{4}{15}t^2\sqrt{t}.$

$v(t)=0\Rightarrow t-\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}=t\left(1-\dfrac{2}{3}\sqrt{t}\right)=0\Rightarrow t=0,\dfrac{2}{3}\sqrt{t}=1\Rightarrow t=0,\dfrac{9}{4}.$

$0<t<\dfrac{9}{4}$ のとき $v(t)>0,\dfrac{9}{4}<t$ のとき $v(t)<0$ より, $0<t<\dfrac{9}{4}$ のとき正の向き $\dfrac{9}{4}<t$ のとき負の向きに動く.

$x(0)=0,x\left(\dfrac{9}{4}\right)=\dfrac{81}{32}-\dfrac{81}{40}=\dfrac{81}{160},x(9)=\dfrac{81}{2}-\dfrac{324}{5}=-\dfrac{243}{10}.$ よって

$0<t<\dfrac{9}{4}$ のとき $\left|x\left(\dfrac{9}{4}\right)-x(0)\right|=\dfrac{81}{160}$, $\dfrac{9}{4}<t<9$ のとき $\left|x(9)-x\left(\dfrac{9}{4}\right)\right|=\left|-\dfrac{243}{10}-\dfrac{81}{160}\right|=\dfrac{3969}{160}$

動く. よって $0<t<9$ のとき実際に動いた道のりは $\dfrac{81}{160}+\dfrac{3969}{160}=\dfrac{4050}{160}=\dfrac{405}{16}.$

(2) $v(t)=v(0)+\int_0^t \cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)dt=0+\left[\dfrac{2}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\right]_0^t=\dfrac{2}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right).$

$x(t)=x(0)+\dfrac{2}{\pi}\int_0^t \sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)dt=0+\dfrac{2}{\pi}\left[-\dfrac{2}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\right]_0^t=-\dfrac{4}{\pi^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)+\dfrac{4}{\pi^2}.$

$v(t)=0\Rightarrow\dfrac{2}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)=0.$ $0<t<3$ より $0<\dfrac{\pi}{2}t<\dfrac{3}{2}\pi.$ よって $\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}t=\pi\Rightarrow t=2.$

$|x(2)-x(0)|=\left|-\dfrac{4}{\pi^2}\cos\pi+\dfrac{4}{\pi^2}\right|=\dfrac{8}{\pi^2}$, $|x(3)-x(2)|=\left|-\dfrac{4}{\pi^2}\cos\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{4}{\pi^2}-\left(-\dfrac{4}{\pi^2}\cos\pi+\dfrac{4}{\pi^2}\right)\right|=\dfrac{4}{\pi^2}.$

よって $0<t<3$ のとき実際に動いた道のりは $\dfrac{8}{\pi^2}+\dfrac{4}{\pi^2}=\dfrac{12}{\pi^2}.$

252. t 時間後の細菌の個数を $N(t)$ とすると $N'(t)=kN(t)$ (k は比例定数). $\dfrac{N'(t)}{N(t)}=k.$ 両辺を積分すると

$\int\dfrac{N'(t)}{N(t)}dt=\int kdt\Rightarrow\log N(t)=kt+C\Rightarrow N(t)=e^{kt+C}=e^{kt}e^C.$ $N(0)=e^C$ より $N(t)=N(0)e^{kt}.$

条件より $N(3)=N(0)e^{3k}=10000,N(5)=N(0)e^{5k}=40000.$ よって $\dfrac{N(0)e^{5k}}{N(0)e^{3k}}=\dfrac{40000}{10000},e^{2k}=4=2^2,e^k=2.$

よって $N(0)e^{3k}=N(0)(e^k)^3=N(0)2^3=8N(0)=10000$ より $N(0)=1250$(個).

253. 時刻 0 のとき, 時刻 t のときの水の容積はそれぞれ πr^2h, πr^2x だから時間 t の間に流れ出る水の量は

$\pi r^2h-\pi r^2x=\pi r^2(h-x).$ よって単位時間に流れ出る水の量 (流れ出る水の速度) は t について微分して

$\dfrac{d\{\pi r^2(h-x)\}}{dt}=\dfrac{d\{\pi r^2(h-x)\}}{dx}\dfrac{dx}{dt}=-\pi r^2\dfrac{dx}{dt}.$ よって $-\pi r^2\dfrac{dx}{dt}=k\sqrt{x}$ より $-\dfrac{\pi r^2}{\sqrt{x}}\dfrac{dx}{dt}=k.$

両辺を t について積分して $-\int\dfrac{\pi r^2}{\sqrt{x}}\dfrac{dx}{dt}dt=\int kdt.$ 左辺 $=-\int\dfrac{\pi r^2}{\sqrt{x}}dx=-\pi r^2\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=-2\pi r^2\sqrt{x}.$

よって $-2\pi r^2\sqrt{x}=kt+C.$ $t=0$ のとき $x=h$ だから $-2\pi r^2\sqrt{h}=C.$ よって $-2\pi r^2\sqrt{x}=kt-2\pi r^2\sqrt{h}.$

$\sqrt{x}=-\dfrac{kt}{2\pi r^2}+\sqrt{h}$ より $x=\left(-\dfrac{kt}{2\pi r^2}+\sqrt{h}\right)^2.$

254. $(e^{-x^2})'=e^{-x^2}(-x^2)'=-2xe^{-x^2}.$ よって $xe^{-x^2}=-\dfrac{1}{2}(e^{-x^2})'$ だから $\int_0^\infty x^ne^{-x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^{n-1}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\right)'dx$

$=\lim_{b\to\infty}\left\{\left[x^{n-1}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right]_0^b-\int_0^b(x^{n-1})'\cdot\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\right)dx\right\}=\lim_{b\to\infty}\left(-\dfrac{b^{n-1}}{2e^{b^2}}+\dfrac{n-1}{2}\int_0^b x^{n-2}e^{-x^2}dx\right).$

ロピタルの定理を繰り返して $\lim_{b\to\infty}\dfrac{b^{n-1}}{e^{b^2}}=\lim_{b\to\infty}\dfrac{(b^{n-1})'}{(e^{b^2})'}=\lim_{b\to\infty}\dfrac{(n-1)b^{n-2}}{e^{b^2}2b}=\dfrac{n-1}{2}\lim_{b\to\infty}\dfrac{b^{n-3}}{e^{b^2}}=\cdots.$

n が奇数ならば $\lim_{b\to\infty}\dfrac{b^{n-1}}{e^{b^2}}=\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}\cdots\dfrac{2}{2}\lim_{b\to\infty}\dfrac{1}{e^{b^2}}=0.$

n が偶数ならば $\lim_{b\to\infty}\dfrac{b^{n-1}}{e^{b^2}}=\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}\cdots\dfrac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\dfrac{b^{-1}}{e^{b^2}}=0.$ いずれの場合も

$\int_0^\infty x^ne^{-x^2}dx=\dfrac{n-1}{2}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x^2}dx.$

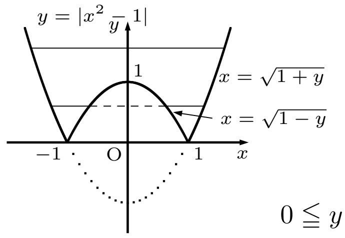
255. (1) $\angle$AOB$=\theta_2-\theta_1$ より $\triangle$OAB の面積 S は $S=\dfrac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1).$

(2) (1) より $S=\dfrac{1}{2}\sin(\theta_2-\theta_2)=\dfrac{1}{2}r_1r_2(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)=\dfrac{1}{2}\{(r_1\cos\theta_1)(r_2\sin\theta_2)-(r_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2)\}.$

$x_1 = r_1\cos\theta_1, y_1 = r_1\sin\theta_1, x_2 = r_2\cos\theta_2, y_2 = r_2\sin\theta_2$ だから $S = \dfrac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2)$.

256. (1) $V = \pi\displaystyle\int_0^h x^2dy = \pi\int_0^h ydy = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{\pi}{2}h^2(\mathrm{cm}^3)$.

(2) $y > 1$ のとき $y = |x^2-1| \Rightarrow y = x^2-1, y = -x^2+1 \Rightarrow x^2 = 1+y, 1-y$. $1-y<0$ より $x^2 = y \Rightarrow x = \pm\sqrt{1+y}$.



$0 \leqq y \leqq 1$ のとき $y = |x^2-1| \Rightarrow y = x^2-1, y = -x^2+1 \Rightarrow x^2 = 1+y, 1-y$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{1+y}, \pm\sqrt{1-y}$.

よって y における断面 $S(y)$ は $y>1$ のとき $S(y) = \pi\sqrt{1+y}^2 = \pi(1+y)$,

$0 \leqq y \leqq 1$ のとき $S(y) = \pi\sqrt{1+y}^2 - \pi\sqrt{1-y}^2 = 2\pi y$. よって水位が h のときの水量は

$h > 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 2\pi ydy + \int_1^h \pi(1+y)dy = \pi[y^2]_0^1 + \pi\left[y + \frac{y^2}{2}\right]_1^h = \pi + \pi\left(h + \frac{h^2}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2}(h^2+2h-1)$.

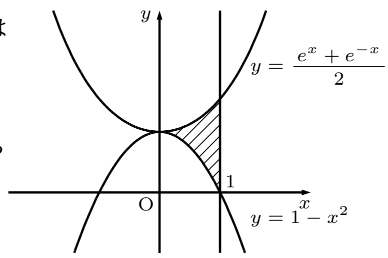
$0 \leqq h \leqq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^h 2\pi ydy = \pi[y^2]_0^h = \pi h^2$.

(3) t 秒後の水の量は $Vt(\mathrm{cm}^3)$ である. t 秒後の水位を h とすれば (2) より $h>1$ のとき $Vt = \dfrac{\pi}{2}(h^2+2h-1)$.

両辺を t で微分すると $V = \dfrac{\pi}{2}(2h+2)\dfrac{dh}{dt}$. よって水面の上昇速度 $\dfrac{dh}{dt}$ は $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{V}{\pi(h+1)}$(cm/ 秒).

$0 \leqq h \leqq 1$ のときも同様に $Vt = \pi h^2$. t で微分して $V = 2\pi h\dfrac{dh}{dt}$ より $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{V}{2\pi h}$(cm/ 秒).

257. (1) 相加平均と相乗平均の関係より $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \geqq \sqrt{e^xe^{-x}} = 1$. 等号は



$e^x = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ より $e^{2x}=1$, すなわち $x=0$ のときである.

$g(x) = 1-x^2 \leqq 1$ で最大値 $g(x)=1$ となるのは $x=0$ のときであるから

$f(x) \geqq g(x)$ で等号は $x=0$ のときである. よって

$S = \displaystyle\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx = \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) - (1-x^2)\right\}dx$

$= \left[\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}) - x + \dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}(e-e^{-1}) - 1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}(e^0-e^0) = \dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right) - \dfrac{2}{3}$.

(2) l_1 を $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さ, l_2 を $y=g(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さ,

l_3 を直線 $x=1$ と $y=f(x), y=g(x)$ との交点間の距離とすると $L = l_1+l_2+l_3$. $f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

$1+\{f'(x)\}^2 = 1+\dfrac{1}{4}(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}) = \dfrac{4}{4}+\dfrac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x}) = \dfrac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}) = \left\{\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right\}^2$.

よって $l_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx = \int_0^1 \sqrt{\left\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right\}^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx = \frac{1}{2}[e^x-e^{-x}]_0^1$

$= \dfrac{1}{2}(e-e^{-1}-e^0+e^0) = \dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$.

$g'(x) = -2x$, $l_2 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\{g'(x)\}^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}dx$. $2x=t$ とおくと $dx = \dfrac{1}{2}dt$,

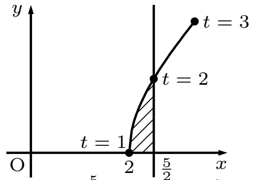
x	$0 \to 1$
t	$0 \to 2$

$l_2 = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[t\sqrt{t^2+1} + \log|t+\sqrt{t^2+1}|]_0^2 = \frac{1}{4}\{2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})\}$.

$x=1, y=f(x)$ より $y=f(1)=\dfrac{1}{2}(e+e^{-1})$. $x=1, y=g(x)$ より $y=g(1)=0$. よって $l_3 = \dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{e}\right)$.

よって $L = l_1+l_2+l_3 = \dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right) + \dfrac{1}{4}\{2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})\} + \dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{e}\right) = e + \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$.

258.



$x = \dfrac{5}{2}$ のとき $x = t+\dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2}$ より $2t^2+2=5t \Rightarrow 2t^2-5t+2 = (2t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}, 2$.

$1 \leqq t \leqq 3$ より $t=2$. x 軸との交点, すなわち $y=0$ となるのは $y = t-\dfrac{1}{t} = 0$ より

$t = \dfrac{1}{t} \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$. $1 \leqq t \leqq 3$ より $t=1$ のときである. よって求める面積 S は

$S = \displaystyle\int_2^{\frac{5}{2}} ydx = \int_1^2 y\frac{dx}{dt}dt = \int_1^2\left(t-\frac{1}{t}\right)(1-t^{-2})dt = \int_1^2\left(t-\frac{2}{t}+t^{-3}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} - 2\log|t| + \frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^2$

$= 2 - 2\log 2 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} + 2\log 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{15}{8} - 2\log 2$.

259. (1) $\log r = t$ とおくと $\dfrac{1}{r}dr = dt$, $\begin{array}{c|ccc} r & 1 & \to & e \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}$ よって与式 $= \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2.$

(2) $\log r = t$ とおくと $\dfrac{1}{r}dr = dt$, $\begin{array}{c|ccc} r & e & \to & \infty \\ \hline t & 1 & \to & \infty \end{array}$ よって与式 $= \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^\infty = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty = 1.$

p.64　PLUS

1 直交座標と極座標

260. (1) $x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = r^2 = 9.$ $r \geqq 0$ だから $r=3.$

(2) (1) より $x^2+y^2=r^2$ だから $x^2+y^2-2x-2y = r^2-2r\cos\theta-2r\sin\theta = r\{r-2(\cos\theta+\sin\theta)\}=0.$

$r=0$ または $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$. $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき $\cos\theta+\sin\theta=0$ だから $r=2(\cos\theta+\sin\theta).$

(3) $x+y = r\cos\theta+r\sin\theta = r(\cos\theta+\sin\theta)=2.$ よって $r = \dfrac{2}{\cos\theta+\sin\theta}.$

(4) $y^2-4x-4 = r^2\sin^2\theta - 4r\cos\theta - 4 = r^2(1-\cos^2\theta)-4r\cos\theta-4 = r^2(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)-4r\cos\theta-4$

$=\{r(1+\cos\theta)+2\}\{r(1-\cos\theta)-2\}=0.$ よって $r = -\dfrac{2}{1+\cos\theta}$ または $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}.$

$r\geqq 0$ より $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}.$

261. (1) $r = \dfrac{2}{1-2\cos\theta} \Rightarrow r(1-2\cos\theta) = r-2r\cos\theta = r-2x = 2 \Rightarrow r = 2x+2 \Rightarrow r^2 = (2x+2)^2.$ よって

$x^2+y^2 = 4x^2+8x+4 \Rightarrow 3x^2-y^2+8x+4=0.$ $(2x+2=r\geqq 0$ より $x\geqq -1)$

(2) $r = \dfrac{1}{2-\cos\theta} \Rightarrow r(2-\cos\theta) = 2r - r\cos\theta = 2r-x = 1 \Rightarrow 2r = x+1 \Rightarrow 4r^2 = (x+1)^2.$ よって

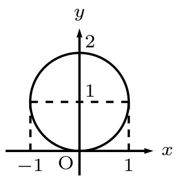
$4(x^2+y^2) = x^2+2x+1 \Rightarrow 3x^2+4y^2-2x-1=0.$ $(x+1=2r\geqq 0$ より $x\geqq -1)$

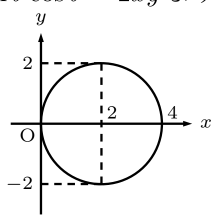
(3) $r = \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow r\cos\theta = 1 \Rightarrow x=1.$

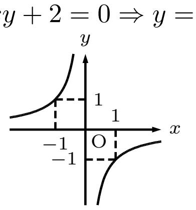
262. (1) $r = 2\sin\theta \Rightarrow r^2 = 2r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=2y \Rightarrow x^2+y^2-2y=0 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=1.$

(2) $r=4\cos\theta \Rightarrow r^2 = 4r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2=4x \Rightarrow x^2+y^2-4x=0 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4.$

(3) $r^2\sin 2\theta = 2r^2\sin\theta\cos\theta = 2xy$ より $2xy+2=0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{x}.$







2 回転面の面積

263. (1) $y' = 3x^2.$ よって $S = 2\pi\displaystyle\int_0^1 y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx.$ $1+9x^4=t$ とおくと $36x^3dx = dt,$

$x^3dx = \dfrac{dt}{36},$ $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 1 & \to & 10 \end{array}$ $S = 2\pi\displaystyle\int_1^{10}\sqrt{t}\frac{dt}{36} = \frac{\pi}{18}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}(10^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{(10\sqrt{10}-1)\pi}{27}.$

(2) $y' = -\dfrac{r}{h}.$ よって $S = 2\pi\displaystyle\int_0^h y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_0^h\left(r-\frac{r}{h}x\right)\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}dx = \frac{2\pi\sqrt{r^2+h^2}}{h}\left[rx-\frac{rx^2}{2h}\right]_0^h$

$= \dfrac{2\pi\sqrt{r^2+h^2}}{h}\left(rh-\dfrac{rh^2}{2h}\right) = \dfrac{2\pi\sqrt{r^2+h^2}}{h}\cdot\dfrac{rh}{2} = \pi r\sqrt{r^2+h^2}.$

(3) $y' = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, 1+\{y'\}^2 = 1+\dfrac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4} = \dfrac{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$

$= \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2.$ よって $S = 2\pi\displaystyle\int_{-1}^1 y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_{-1}^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}dx$

$= 4\pi\displaystyle\int_0^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx = 4\pi\int_0^1\left(\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}\right)dx = \pi\int_0^1(e^{2x}+2+e^{-2x})dx$

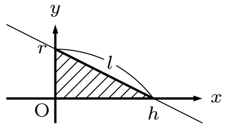
$$= \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x + \frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \pi\left\{\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{2}(e^2 + 4 - e^{-2}).$$

264. 原点中心, 半径 r の球面は xy 平面上の半円 $x^2+y^2=r^2, y \geqq 0$ を x 軸のまわりに回転した回転面である.

このとき $y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$. $y \geqq 0$ より $y = \sqrt{r^2-x^2}$. $y' = \dfrac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{(r^2-x^2)\left(1+\frac{x^2}{r^2-x^2}\right)}dx$$

$$= 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2+x^2}dx = 2\pi\int_{-r}^{r} r dx = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 2\pi r\{r-(-r)\} = 4\pi r^2.$$

265. 

図のように直線 $y = r - \dfrac{r}{h}x\ (0 \leqq x \leqq h)$ と x 軸, y 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転させてできた回転体が問題の円錐だからその体積 V は $V = \pi\displaystyle\int_0^h y^2dx = \pi\int_0^h\left(r - \frac{r}{h}x\right)^2dx$

$$= \pi r^2\int_0^h\left(1 - \frac{2}{h}x + \frac{x^2}{h^2}\right)dx = \pi r^2\left[x - \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

底面積は πr^2. 側面積は $y = r - \dfrac{r}{h}x\ (0 \leqq x \leqq h)$ を x のまわりに回転させてできる回転面の面積で, $y' = -\dfrac{r}{h}$ より

$$S = \pi r^2 + 2\pi\int_0^h y\sqrt{1+(y')^2}dx = \pi r^2 + 2\pi\int_0^h\left(r - \frac{r}{h}x\right)\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}dx = \pi r^2 + \frac{2\pi\sqrt{r^2+h^2}}{h}\left[rx - \frac{rx^2}{2h}\right]_0^h$$

$= \pi r^2 + \dfrac{2\pi\sqrt{r^2+h^2}}{h}\cdot\dfrac{rh}{2} = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2+h^2}$. $\sqrt{r^2+h^2} = l$ より $S = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r+l)$.

3 台形公式

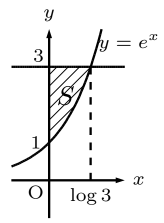
266. $x_0 = 0, x_1 = \dfrac{1}{4}, x_2 = \dfrac{1}{2}, x_3 = \dfrac{3}{4}, x_4 = 1$. $y_0 = 1, y_1 = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} = \dfrac{16}{17}, y_2 = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{4}{5}, y_3 = \dfrac{1}{1+(\frac{3}{4})^2}$

$= \dfrac{16}{25}, y_4 = \dfrac{1}{2}$. $h = \dfrac{1-0}{4} = \dfrac{1}{4}$ だから $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx \fallingdotseq \frac{1}{8}\{y_0+y_4+2(y_1+y_2+y_3)\}$

$= \dfrac{1}{8}\left\{1 + \dfrac{1}{2} + 2\left(\dfrac{16}{17} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{16}{25}\right)\right\} = \dfrac{5323}{6800} = 0.7827\cdots$. よって 0.783

4 発展問題

267. (1) $A = \displaystyle\int_0^{\log 3}(3-e^x)dx = [3x - e^x]_0^{\log 3} = 3\log 3 - e^{\log 3} - (0 - e^0) = 3\log 3 - 3 + 1 = 3\log 3 - 2$.



(2) $0 < t \leqq \dfrac{\log 3}{2}$ のとき $A(t) = \displaystyle\int_t^{2t}(3-e^x)dx = [3x-e^x]_t^{2t} = 6t - e^{2t} - (3t - e^t) = 3t - e^{2t} + e^t$.

$\dfrac{\log 3}{2} < t < \log 3$ のとき $A(t) = \displaystyle\int_t^{\log 3}(3-e^x)dx = [3x - e^x]_t^{\log 3} = 3\log 3 - e^{\log 3} - (3t - e^t)$

$= 3\log 3 - 3 - 3t + e^t$.

(3) $0 < t \leqq \dfrac{\log 3}{2}$ のとき $A'(t) = 3 - 2e^{2t} + e^t$. $e^t = X$ とおくと $A'(t) = -2X^2 + X + 3 = -(2X-3)(X+1)$.

よって $A'(t) = 0 \Rightarrow X = \dfrac{3}{2}, -1$. $X = e^t > 0$ より $X = e^t = \dfrac{3}{2} \Rightarrow t = \log\dfrac{3}{2}$. ここで

$\dfrac{\log 3}{2} = \dfrac{1}{2}\log 3 = \log 3^{\frac{1}{2}} = \log\sqrt{3}$. $\dfrac{3}{2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \sqrt{2.25}$ だから $\log\dfrac{3}{2} = \log\sqrt{2.25} < \log\sqrt{3} = \dfrac{\log 3}{2}$ である.

t	0	$\cdots$	$\log\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{\log 3}{2}$
X	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$A'(t)$		$+$	0	$-$	
$A(t)$	0	$\nearrow$	$A(\log\frac{3}{2})$	$\searrow$	$A(\frac{\log 3}{2})$

$t = \log\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $A(\log\frac{3}{2}) = 3\log\dfrac{3}{2} - e^{2\log\frac{3}{2}} + e^{\log\frac{3}{2}}$

$= 3\log\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} = 3\log\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}$.

$\dfrac{\log 3}{2} < t < \log 3$ のとき $A'(t) = -3 + e^t$. $t < \log 3$ より $e^t < e^{\log 3} = 3$ だから $A'(t) < 0$. よって $A(t)$ は単調減少で $t = \dfrac{\log 3}{2}$ のとき最大値 $A(\frac{\log 3}{2})$.

増減表より $A(\log\frac{3}{2}) > A(\frac{\log 3}{2})$ だから $t = \log\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $A(\log\frac{3}{2}) = 3\log\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}$.

268. (1) $\dfrac{dx}{dt}=2\sin t\cos t,\ \dfrac{dx}{dt}=0\Rightarrow \sin t=0,\cos t=0.\ 0\leqq t\leqq\pi$ より $t=\dfrac{\pi}{2}$.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\dfrac{dy}{dt}=\cos t(1+\cos t)-\sin^2 t=\cos t(1+\cos t)-(1-\cos^2 t)$

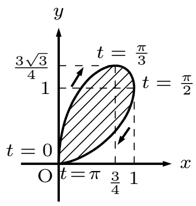
$=2\cos^2 t+\cos t-1=(2\cos t-1)(\cos t+1),\ \dfrac{dy}{dt}=0\Rightarrow\cos t=\dfrac{1}{2},-1.$

$0\leqq t\leqq\pi$ より $t=\dfrac{\pi}{3}$.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

$t=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $x=\dfrac{3}{4},y=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. $t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $x=1,y=1$.

概形は右図の通り.



(2) (1) の図の上の曲線, すなわち $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を $y=f(x)$, 下の曲線, $\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ の部分を $y=g(x)$ とすると

$S=\displaystyle\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx.$

媒介変数表示より $y=f(x)=\sin t(1+\cos t),x=\sin^2 t$ より $dx=2\sin t\cos t dt$.

x	$0\ \to\ 1$
t	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$

よって $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t(1+\cos t)2\sin t\cos t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t(1+\cos t)dt.$

同様に $y=g(x)=\sin t(1+\cos t),x=\sin^2 t$ より $dx=2\sin t\cos t dt$.

x	$0\ \to\ 1$
t	$\pi\ \to\ \frac{\pi}{2}$

よって $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sin t(1+\cos t)2\sin t\cos t dt=2\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t(1+\cos t)dt.$ 従って

$S=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t(1+\cos t)dt-2\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t(1+\cos t)dt$

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t(1+\cos t)dt+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 t\cos t(1+\cos t)dt=2\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t(1+\cos t)dt$

$=2\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t dt+2\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt=2\int_0^{\pi}\sin^2 t(\sin t)'dt+2\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt=2\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 2t dt$

$=0+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{4}\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}-\frac{\sin 4\pi}{16}=\frac{\pi}{4}.$

269. (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{(t^3-t)'}{(t^2-1)'}=\dfrac{3t^2-1}{2t}$ より $t=t_0$ のときの接線の傾きは $\dfrac{3t_0^2-1}{2t_0}$, $x=t_0^2-1$, $y=t_0^3-t_0$. よって

$t=t_0$ のときの接線の方程式は $y-(t_0^3-t_0)=\dfrac{3t_0^2-1}{2t_0}\{x-(t_0^2-1)\}$, すなわち

$2t_0\{y-(t_0^3-t_0)\}=(3t_0^2-1)\{x-(t_0^2-1)\}$ より $(3t_0^2-1)x-2t_0y-t_0^4+2t_0^2-1=0$.

x 軸と平行の場合 x の係数 0. よって $3t_0^2-1=0$ より $t_0=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. よって $x=t_0^2-1=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$,

$y=t_0^3-t_0=\pm\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\mp\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. 求める接点の座標は $\left(-\dfrac{2}{3},\pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

y 軸と平行の場合 y の係数 0. よって $2t_0=0$ より $t_0=0$. よって $x=t_0^2-1=-1,y=t_0^3-t_0=0$.

求める接点の座標は $(-1,0)$.

(2) $t=t_0,t_1\ (t_0\neq t_1)$ で同じ点 $\mathrm{P}(x,y)$ を通る (P で交差する) とすると $x=t_0^2-1=t_1^2-1,y=t_0^3-t_0=t_1^3-t_1$.

よって $t_0^2-t_1^2=(t_0-t_1)(t_0+t_1)=0,t_0^3-t_1^3-t_0+t_1=(t_0-t_1)(t_0^2+t_0t_1+t_1^2-1)=0$. $t_0\neq t_1$ より $t_0-t_1\neq 0$

だから $t_0+t_1=0\cdots$①, $t_0^2+t_0t_1+t_1^2-1=0\cdots$②. ①より $t_1=-t_0$. ③に代入して $t_0^2-1=0$. よって $t_0=\pm1$.

$t_0>0$ とすると $t_0=1,t_1=-1$. このとき $x=1^2-1=0,y=1^3-1=0$. よって $\mathrm{P}(0,0)$.

$t=\pm1$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2-1}{2t}=\pm1$. よって 2 本の接線の傾きは 1 と -1.

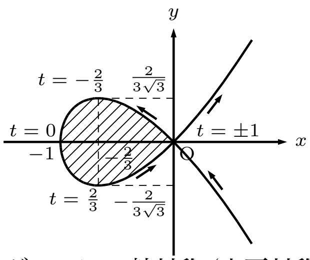
(3) $\dfrac{dx}{dt}=2t,\ \dfrac{dx}{dt}=0\Rightarrow t=0.$

$\dfrac{dy}{dt}=3t^2-1,\ \dfrac{dy}{dt}=0\Rightarrow t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$-$	0	$+$
x	$\searrow$	-1	$\nearrow$

t	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$\frac{dy}{dt}$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty}x=\lim_{t\to\pm\infty}(t^2-1)=\infty,\lim_{t\to\infty}y=\lim_{t\to\infty}(t^3-t)=\infty,\lim_{t\to-\infty}y=\lim_{t\to-\infty}(t^3-t)=-\infty.$



(4) グラフは y 軸対称 (上下対称) だから (3) の図の上の曲線, すなわち $-1 \leqq t \leqq 0$ の部分を $y=f(x)$ とすると求める面積 S は $S=2\int_{-1}^{0} f(x)dx$. 媒介変数表示より $y=f(x)=t^3-t, x=t^2-1$ より $dx=2tdt$.

x	$-1 \quad \to \quad 0$
t	$0 \quad \to \quad -1$

よって $S=2\int_0^{-1}(t^3-t)2tdt=4\int_0^{-1}(t^4-t^2)dt=4\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_0^{-1}$
$=4\left(\frac{-1}{5}-\frac{-1}{3}\right)=\frac{8}{15}$.

270. (1) $t=\frac{\pi}{6}$ のとき $x=e^{-\frac{\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}, x=e^{-\frac{\pi}{6}}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}$. よって $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}, \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}\right)$.

(2) $\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t+e^{-t}(-\sin t)=-e^{-t}(\cos t+\sin t), \frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$.
$t=\frac{\pi}{3}$ のとき $\frac{dx}{dt}=-e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=-e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$.
$\frac{dy}{dt}=e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$. よって
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}\right)$.

(3) (2) より $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\{-e^{-t}(\cos t+\sin t)\}^2+\{e^{-t}(\cos t-\sin t)\}^2$
$=e^{-2t}(\cos^2 t+2\sin t\cos t+\sin^2 t)+e^{-2t}(\cos^2 t+2\sin t\cos t+\sin^2 t)=e^{-2t}(2\cos^2 t+2\sin^2 t)=2e^{-2t}$. よって
$l=\int_0^{4\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{4\pi}\sqrt{2e^{-2t}}dt=\int_0^{4\pi}\sqrt{2}e^{-t}dt=\sqrt{2}[-e^{-t}]_0^{4\pi}=\sqrt{2}(-e^{-4\pi}+1)$
$=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e^{4\pi}}\right)$.