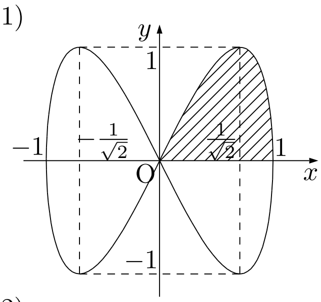
第 4 章§ 2 いろいろな応用

p.143 練習問題 2-A

1. (1)

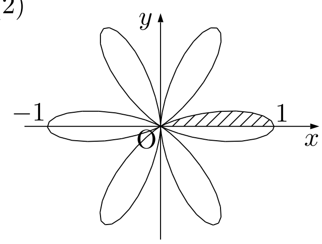


x 軸, y 軸に関して対称だから図形の面積 S は第 1 象限にある曲線 $x=\cos t$, $y=\sin 2t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形の面積の 4 倍. よって

$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2t(\cos t)'|dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 t\cos t\ dt \quad \sin t=u$ とおくと

$\cos t\ dt=du,\ \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 0 & \to & 1 \end{array}$ よって $S=4\int_0^1 2u^2du=4\left[\frac{2}{3}u^3\right]_0^1=\frac{8}{3}$

(2)



図形の面積 S は曲線 $r=\cos^2 3\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}\right)$ と x 軸で囲まれた図形の面積の 12 倍. よって $S=12\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2 3\theta)^2d\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^4 3\theta\ d\theta \quad 3\theta=t$ とおくと $d\theta=\frac{dt}{3}$

$\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{6} \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array}$ よって $S=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\frac{dt}{3}=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi$

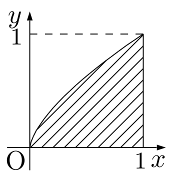
2. (1) $(x'=)\frac{dx}{dt}=t, (y'=)\frac{dy}{dt}=t^2$. よって $\ell=\int_0^1\sqrt{t^2+(t^2)^2}dt=\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}dt \quad 1+t^2=u$ とおくと

$tdt=\frac{du}{2}.\ \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline u & 1 & \to & 2 \end{array}.\ \ell=\int_1^2\sqrt{t}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$

(2) $r'=1$ よって $\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1}+\log\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_0^{2\pi}$

$=\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\log\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)$

3.



$V=\pi\int_a^b y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt=\pi\int_0^1(t^2)^2\left|3t^2\right|dt=\pi\int_0^1 3t^6\ dt=\pi\left[\frac{3}{7}t^7\right]_0^1=\frac{3}{7}\pi$

4. (1) 与式 $=\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx \quad -x^2=t$ とおくと $xdx=-\frac{dt}{2},\ \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & b \\ \hline t & 0 & \to & -b^2 \end{array}$, 与式 $=\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b^2}e^t\left(-\frac{dt}{2}\right)$

$=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}[e^t]_0^{-b^2}=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(e^{-b^2}-1)=\frac{1}{2}$

(2) 与式 $=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \quad a^2-x^2=t$ とおくと $xdx=-\frac{dt}{2},\ \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & a-\varepsilon \\ \hline t & a^2 & \to & 2a\varepsilon-\varepsilon^2 \end{array},$

与式 $=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a^2}^{2a\varepsilon-\varepsilon^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to+0}[2\sqrt{t}]_{a^2}^{2a\varepsilon-\varepsilon^2}=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}(2\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}-2a)=a$

(3) 与式 $=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\log x\ dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left([x\log x]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 x\cdot\frac{1}{x}dx\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\log 1-\varepsilon\log\varepsilon-[x]_\varepsilon^1\right)$

$=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon\log\varepsilon-1+\varepsilon)$ ロピタルの定理より $\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(\log\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}$

$=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon)=0$ よって与式 $=1$

(4) 与式 $=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{\log x}{x}\ dx \quad \log x=t$ とおくと $\frac{dx}{x}=dt,\ \begin{array}{c|ccc} x & \varepsilon & \to & 1 \\ \hline t & \log\varepsilon & \to & 0 \end{array}$, 与式 $=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\log\varepsilon}^0 t\ dt$

$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\log\varepsilon}^0=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\{0-(\log\varepsilon)^2\}=-\infty$ よって存在しない.

5. (1) 速度 0 より $12-8t=0$ よって $t=\frac{3}{2}$. $x=8+\int_0^{\frac{3}{2}}(12-8t)dt=8+[12t-4t^2]_0^{\frac{3}{2}}=8+18-9=17$

(2) $0\leqq t\leqq\frac{3}{2}$ のとき速度 $v\geqq 0$ より座標 x は正の方向に移動, $\frac{3}{2}\leqq t\leqq 4$ のとき $v\leqq 0$ より座標 x は負の方向に移

動する．よって道のりは$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}(12-8t)dt+\left|\int_{\frac{3}{2}}^4(12-8t)dt\right|=[12t-4t^2]_0^{\frac{3}{2}}+\left|[12t-4t^2]_{\frac{3}{2}}^4\right|$
$=18-9+|48-64-18+9|=34$

p.144 練習問題 2-B

1. (1) 直交座標で表すと $\mathrm{P}_1(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1), \mathrm{P}_2(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$.

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2^2=(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2)^2$

$=r_1^2\cos^2\theta_1-2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2+r_2^2\cos^2\theta_2+r_1^2\sin^2\theta_1-2r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2+r_2^2\sin^2\theta_2.$

$=r_1^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)-2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+r_2^2(\cos^2\theta_2+\sin\theta_2)$

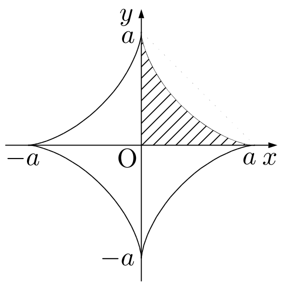
$=r_1^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)+r_2^2$

よって $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\sqrt{r_1^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)+r_2^2}$

(2) 点 $\mathrm{A}(1,0)$ とすると $\mathrm{AP}=1$. (1) より $\mathrm{AP}\sqrt{r^2+1^2-2r\cdot 1\cos(\theta-0)}$. よって $\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}=1$.

$r^2=2r\cos\theta$. $r=2\cos\theta$.

2. (1)



x 軸, y 軸に関して対称だから図形の面積 S は第 1 象限にある曲線と x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積の 4 倍．よって $\displaystyle S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|a\sin^3 t(a\cos^3 t)'|dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2 3\sin^4 t\cos^2 t\ dt$

$\displaystyle=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)dt=12a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\ dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\ dt\right)$

$\displaystyle=12a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2$

(2) $\displaystyle\frac{dx}{dt}=3a\cos^2 t(-\sin t),\ \frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$ より

$\displaystyle\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2=9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t$

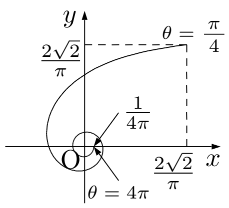
$\displaystyle=9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)=9a^2\sin^2 t\cos^2 t$. (1) と同様に $\displaystyle\ell=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\ dt$

$\displaystyle=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2t}{2}dt=6a\left[\frac{-\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3a(-\cos\pi+\cos 0)=6a$

(3) $\displaystyle V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3 t)^2|-3a\cos^2 t\sin t|dt=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^7 t\ dt=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\sin^7 t\ dt$

$\displaystyle=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\ dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 t\ dt=6\pi a^3\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{105}\pi a^3.$

3. (1)



(2) $\displaystyle r'=\left(\frac{1}{\theta}\right)'=-\frac{1}{\theta^2}$ よって $\displaystyle\ell=\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\sqrt{\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^4}}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\sqrt{\frac{\theta^2+1}{\theta^4}}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\frac{\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}d\theta$

$\displaystyle\int\frac{1}{\theta^2}d\theta=-\frac{1}{\theta}$ より部分積分によって $\displaystyle\ell=\left[-\frac{1}{\theta}\cdot\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\left(-\frac{1}{\theta}\right)\cdot\frac{1}{2}(\theta^2+1)^{-\frac{1}{2}}(\theta^2+1)'d\theta$

$\displaystyle=-\frac{\sqrt{16\pi^2+1}}{4\pi}+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}d\theta=-\frac{\sqrt{16\pi^2+1}}{4\pi}+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}+\left[\log\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}$

$\displaystyle=-\frac{\sqrt{16\pi^2+1}}{4\pi}+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}+\log\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right)-\log\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}\right)$

4. $k \neq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 x^{-k} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1-\varepsilon^{1-k}}{1-k}$

$0 < k < 1$ のとき $1-k > 0$ より $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-k} = 0$ よって $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{1-k}$

$k > 1$ のとき $1-k < 0$ よって $k-1 > 0$ より $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1-\varepsilon^{1-k}}{1-k} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-1+\frac{1}{\varepsilon^{k-1}}}{k-1} = \infty$ よって存在しない

$k = 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} [\log|x|]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} (\log 1 - \log \varepsilon) = \infty$ よって存在しない

5. $k \neq 1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x^{-k} dx = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_1^b = \lim_{b \to \infty} \frac{b^{1-k}-1}{1-k}$

$0 < k < 1$ のとき $1-k > 0$ より $\displaystyle\lim_{b \to \infty} b^{1-k} = \infty$ よって存在しない

$k > 1$ のとき $1-k < 0$ よって $k-1 > 0$ より $\displaystyle\lim_{b \to \infty} b^{1-k} = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{b^{k-1}} = 0$ よって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \frac{-1}{1-k} = \frac{1}{k-1}$

$k = 1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} [\log|x|]_1^b = \lim_{b \to \infty} (\log b - \log 1) = \infty$ よって存在しない