第 6 章　§ 2. 2 次曲線

p. 192 練習問題 2-A

1. (1) $(x+2)^2-4+(y-3)^2-9+5=0$ より $(x+2)^2+(y-3)^2=8$ よって中心 $(-2,3)$, 半径 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

   (2) $x^2+(y-1)^2-1-4=0$ より $x^2+(y-1)^2=5$ よって中心 $(0,1)$, 半径 $\sqrt{5}$.

2. (1) 中心の座標が $(-1,2)$ より求める円の方程式は $(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$ とおける. 点 $(3,5)$ を通るから $(3+1)^2+(5-2)^2=r^2$. よって $r^2=25$. 求める円の方程式は $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

   (2) 中心が直線 $y=x$ 上にあるから, 中心の座標を (a,a) とおける. よって求める円の方程式は $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ $(0,0)$ を通るから $(0-a)^2+(0-a)^2=r^2$ より $2a^2=r^2\cdots$①. $(1,2)$ を通るから $(1-a)^2+(2-a)^2=r^2$ より $2a^2-6a+5=r^2\cdots$②. ① − ② より $6a-5=0$. よって $a=\dfrac{5}{6}$. ①より $r^2=\dfrac{25}{18}$. よって求める円の方程式は $\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{18}$

3. 点 P の座標を (x,y) とおくと AP$=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$, BP$=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

   (1) $(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=10$. 整理して $x^2+y^2=1$. 作図は略

   (2) $(x+2)^2+y^2-\{(x-2)^2+y^2\}=1$. 整理して $x=\dfrac{1}{8}$. 作図は略

4. (1) $a=2, b=\sqrt{3}.a>b$ より横長の楕円. 頂点は $(2,0),(-2,0),(0,\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3})$. 概形は解答参照

   (2) $y^2=\dfrac{4}{5}x, p=\dfrac{1}{5}$ 概形は解答参照

   (3) $a=3, b=\sqrt{5}$ 頂点 $(3,0),(-3,0)$. 漸近線は $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}x$. 概形は解答参照

5. (1) $c=\sqrt{5}$. 縦長の楕円だから $8=2b$ よって $b=4$. $a^2+c^2=b^2$ より $a=\sqrt{b^2-c^2}=\sqrt{16-5}=\sqrt{11}$. よって求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{11}+\dfrac{y^2}{16}=1$. 概形は解答参照

   (2) 漸近線より $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$. よって $b=\dfrac{3}{2}a\cdots$①. 通る点 $(2,0)$ は x 軸上にあるので頂点. よって $a=2$. ①より $b=3$. 求める双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$. 概形は解答参照

6. 直線の式を双曲線の式に代入して $4x^2-(x+k)^2=-4$. 整理して $3x^2-2kx-k^2+4=0$.

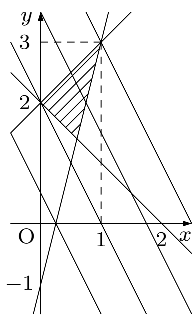
   接するときは重解だから $D=4k^2-4\cdot 3\cdot(-k^2+4)=0$. よって $k^2=3,\quad k=\pm\sqrt{3}$.

   またこのときの 2 次方程式は $3x^2\mp 2\sqrt{3}x+1=(\sqrt{3}x\mp 1)^2=0$. よって $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

   $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\pm\sqrt{3}=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. よって接点の座標は $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

7. (1) 第一式より原点中心, 半径 2 の円の内部. 第二式より $y>-2x-2$. よって直線 $y=-2x-2$ の上側. 求める領域はこの二つが交わる部分 (境界線は含まない). 作図は解答参照

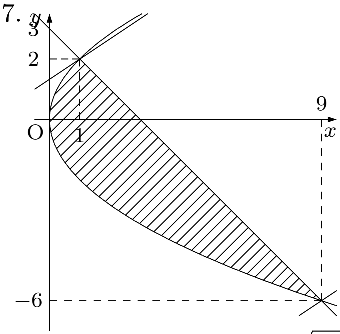
   (2) 第一式より $y\leqq --x^2$. よって放物線 $y=-x^2$ の下側. 第二式より $y\geqq x-2$. よって直線 $y=x-2$ の上側. 求める領域はこの二つが交わる部分 (境界線を含む). 作図は解答参照

8. 

   与えられた連立方程式を満たす領域は左図の斜線部分. $2x+y=k$ とおくと $y=-2x+k$. よって値が k となる点は傾き -2, 切片 k の直線上にある. 斜線部分を通る傾き -2 の直線のうち切片が最大となるのは点 $(1,3)$ を通るとき. よって最大値は $k=2\cdot 1+3=5$. 同様に切片が最小となるのは点 $(0,2)$ を通るとき. よって最小値は $k=2\cdot 0+2=2$. よって最大値 5, 最小値 2.

p. 193 練習問題 2-B

1. 直線の式を円の式に代入して $x^2+m^2x^2-4x-6mx+12=0$. よって $(m^2+1)x^2-(6m+4)x+12=0$. 接するときは $D=(6m+4)^2-4\cdot 12(m^2+1)=0$. よって $3m^2-12m+8=0$. 解の公式より $m=\dfrac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}$.
また共有点をもたないときは実数解がないから $D<0$ より $3m^2-12m+8>0$. よって
$m<\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}, m>\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$.
2. 全体を x 軸方向に $-a$, y 軸方向に $-b$ 平行移動すると問題の円は円 $x^2+y^2=r^2$ に移り, 点 (x_1,y_1) は点 (x_1-a,y_1-b) に移る. 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_1-a,y_1-b) での接線の方程式は p. 186 例題 4 より $(x_1-a)x+(y_1-b)y=r^2$. よって x 軸方向に a, y 軸方向に b 平行移動してもとに戻せば求める接線の方程式は $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=0$.
$(x+2)^2+(y-3)^2=34$ 上の点 $(3,6)$ での接線の方程式は $(3+2)(x+2)+(6-3)(y-3)=34$. よって $5x+3y=33$
3. 直線の式を楕円の式に代入して $3x^2+4(mx+2)^2=12$. よって $(4m^2+3)x^2+16mx+4=0$.
$D=(16m)^2-4\cdot 4(4m^2+3)=48(4m^2-1)$. よって $D>0$ つまり $4m^2-1>0$ のとき実数解 2 個つまり共有点 2 個. $4m^2-1>0$ より $m<-\dfrac{1}{2}, m>\dfrac{1}{2}$. よって $m<-\dfrac{1}{2}, m>\dfrac{1}{2}$ のとき共有点 2 個.　同様に $D=0$ つまり $m=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき重解で共有点 1 個, $D<0$ つまり $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$ のとき虚数解で共有点 0 個.
4. A, B をそれぞれ $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ とおくと A は放物線上の点だから $y_1^2=4px_1$ よって $x_1=\dfrac{y_1^2}{4p}\cdots$①. 同様に $x_2=\dfrac{y_2^2}{4p}\cdots$②. OA$=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{\left(\dfrac{y_1^2}{4p}\right)^2+y_1^2}$. 同様に OB$=\sqrt{\left(\dfrac{y_2^2}{4p}\right)^2+y_2^2}$. OA=OB より
$\left(\dfrac{y_1^2}{4p}\right)^2+y_1^2=\left(\dfrac{y_2^2}{4p}\right)^2+y_2^2$. よって $y_1^4-y_2^4+16p^2y_1^2-16p^2y_2^2=(y_1^2-y_2^2)(y_1^2+y_2^2+16p^2)=0$. $y_1^2+y_2^2+16p^2>0$ より $y_1^2-y_2^2=0$. A と B は異なる点だから $y_1\neq y_2$. よって $y_2=-y_1\cdots$③. ①, ②より $x_1=x_2\cdots$④.
AB$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{0+(-y_1-y_1)^2}=\sqrt{4y_1^2}$. OA=AB より $\left(\dfrac{y_1^2}{4p}\right)^2+y_1^2=4y_1^2$. O と A が異なる点だから $y_1\neq 0$. よって $y_1^2=48p^2, y_1=\pm 4\sqrt{3}p$. ①, ③, ④より $x_1=x_2=12p, y_2=\mp 4\sqrt{3}p$. OA=OB=AB= $8\sqrt{3}|p|$ となるから △OAB は 1 辺 $8\sqrt{3}|p|$ の正三角形. よってその面積は $\dfrac{1}{2}(8\sqrt{3}p)^2\sin 60^\circ=48\sqrt{3}p^2$.
5. (1) AB$=\sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=3$. よって $a^2+b^2=9$
   (2) P は線分 AB を $1:2$ の比に内分する点だから $x=\dfrac{2a+0}{1+2}=\dfrac{2}{3}a, y=\dfrac{0+b}{1+2}=\dfrac{1}{3}b$.
   (3) (2) より $a=\dfrac{3}{2}x, b=3y$. (1) より $a^2+b^2=9$ だから $\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2+(3y)^2=9$. よって $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 作図は解答参照.
6. 準線の方程式は $y=-p$. よって準線上の点を $(t,-p)$ とおくと, この点を通る直線の方程式は傾きを m として $y-(-p)=m(x-t)$. よって $y=mx-mt-p$ これを放物線の式に代入して $x^2=4p(mx-mt-p)$. よって $x^2-4pmx+4pmt+4p^2=0$. これが接線となるのは $D=(-4pm)^2-4(4pmt+4p^2)=16p(pm^2-mt-p)=0$. よって 2 本の接線の傾き m は 2 次方程式 $px^2-tx-p=0$ の 2 つの解. これを m_1,m_2 とすれば解と係数の関係より $m_1m_2=\dfrac{-p}{p}=-1$. よって 2 本の接線は直交する.

7. 

不等式を満たす領域は左図の斜線部分. $2x-3y=k$ とおくと $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{k}{3}$. よって直線が斜線部分を通って切片最大になるとき k は最小, 切片最小となるとき k は最大. それぞれ点 $(1,2)$ と点 $(9,-6)$ を通るときだから最小値 $k=2\cdot1-3\cdot2=-4$, 最大値 $k=2\cdot9-3\cdot(-6)=36$

8. $\mathrm{P}(x,y)$ とおくと PF$=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$,PF'$=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. よって $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$. よって $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. 両辺を 2 乗して $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$. 整理して $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. よって $a^2\{(x-c)^2+y^2\}=(a^2-cx)^2$. より
$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$. よって $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2=a^2(a^2-c^2)$. 問題文より $b^2=a^2-c^2$ だから $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. よって $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.