平成２９年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（前期）

科目	数学	分野	微分積分	１枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 × 2)

(1) $f(x) = \log\sqrt{1-x^2}(-1 < x < 1$ とする$)$

解答

$f(x) = \frac{1}{2}\log(1-x^2)$ であるから、$f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2x}{1-x^2} = \dfrac{-x}{1-x^2}$

(2) $f(x) = \tan^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$

解答

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-2x}{(x^2+1)^2+1} = \frac{-2x}{x^4+2x^2+2}$$

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int(2x+1)e^{x^2+x}dx$

解答

$x^2+x=t$ とすると $(2x+1)dx = dt$ となり、$\displaystyle\int(2x+1)e^{x^2+x}dx = \int e^t dt$(ここまでで 2 点)

$= e^t + c = e^{x^2+x} + c$

積分定数がない時は 4 点。

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2(x-1)^2dx$

解答

$\displaystyle\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$(ここまでで 3 点)

$= \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{30}$

3

極限値 $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\tan x}$ を求めよ。(5 点)

解答

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2$$

4

$f(x,y) = \sqrt{x^2-4y^2}$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 $\times$ 5)

(1) $f_x(x,y)$
解答
$f_x(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-4y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4y^2}}$

(2) $f_y(x,y)$
解答
$f_y(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-4y^2)^{-\frac{1}{2}}(-8y) = \frac{-4y}{\sqrt{x^2-4y^2}}$

(3)$f_{xx}(x,y)$
解答
$f_{xx}(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-4y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-4y^2}}}{x^2-4y^2} = \frac{1}{x^2-4y^2}\left(\frac{x^2-4y^2-x^2}{\sqrt{x^2-4y^2}}\right) = \frac{-4y^2}{(x^2-4y^2)\sqrt{x^2-4y^2}}$

(4) $f_{xy}(x,y)$
解答
$f_{xy}(x,y) = \frac{-x\cdot\frac{-4y}{\sqrt{x^2-4y^2}}}{x^2-4y^2} = \frac{4xy}{(x^2-4y^2)\sqrt{x^2-4y^2}}$

(5) $f_{yy}(x,y)$
解答
$f_{yy}(x,y) = \frac{-4\sqrt{x^2-4y^2}+4y\cdot\frac{-4y}{\sqrt{x^2-4y^2}}}{x^2-4y^2} = \frac{1}{x^2-4y^2}\left(\frac{-4x^2-16y^2+16y^2}{\sqrt{x^2-4y^2}}\right) = \frac{-4x^2}{(x^2-4y^2)\sqrt{x^2-4y^2}}$

科目	数学	分野	微分積分	３枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 $\times 2$)

(1) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy$, D は不等式 $-x \leqq y \leqq x, 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で表される領域

解答

$$\iint_D \sin(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_{-x}^{x} \sin(x+y)dy\right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos(x+y)\right]_{-x}^{x} dx \text{(ここまでで 5 点)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x + \cos 0)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x + 1)dx = \left[-\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$, D は不等式 $x \geqq 0, y \geqq 0, x^2+y^2 \leqq 1$ で表される領域

解答

極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に変換すると $0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^1 r^3 \sin\theta\cos\theta dr\right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \sin\theta\cos\theta d\theta \text{(ここまでで 5 点)}$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \text{(ここまでで 8 点)}$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0\right) = \frac{1}{8}$$

科目	数学	分野	線形代数	１枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

1

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を求めよ。(5 点)

解答

$|A| = 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot a + a \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - a \cdot (-1) \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot a = a$
よって行列式は a

(2) $a = 1$ のときつまり $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ のときに A の逆行列を求めよ。(5 点)

解答

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって逆行列は $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-5-\lambda) - 16 = \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda+7)(\lambda-3) = 0$ の解は $\lambda = 3, -7$

つまり固有値は 3 と -7 となる。(ここまでで 5 点)

$\lambda = 3$ のとき固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 4 \\ 4 & -5-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $-2x + 4y = 0$ を満たせばよい。

$y = c_1$ とすると $x = 2c_1$ となるから固有ベクトルは $c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。c_1 は 0 以外の任意の定数。

$\lambda = -7$ のとき固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1+7 & 4 \\ 4 & -5+7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $8x + 4y = 0$ を満たせばよい。

$x = c_2$ とすると $y = -2c_2$ となるから固有ベクトルは $c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ となる。c_2 は 0 以外の任意の定数。

固有値が正しく固有ベクトルが片方のみ正しいときは 8 点。固有値が片方のみ正しく、それに対応する固有ベクトルが正しいときは 5 点。

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目／２枚中	受検番号		小計		合計	

微分方程式の問題では $x' = \dfrac{dx}{dt}, x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ とする。

1

次の微分方程式の一般解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $tx' - 3x = 2t$

解答

まず $tx' - 3x = 0$ を解く。移項して x で割ると
$\frac{x'}{x} = \frac{3}{t}$, 積分して $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = 3\int \frac{1}{t}dt$
$\log|x| = 3\log|t| + c_1$
$x = \pm e^{3\log|t|+c_1} = \pm e^{c_1}t^3$
となる。(ここまで 2 点)
$x = ut^3$ とすると、$x' = u't^3 + 3ut^2$
元の方程式 $tx' - 3x = 2t$ に代入すると
$u't^4 + 3ut^3 - 3ut^3 = 2t$
$u' = 2t^{-3}$
$u = -t^{-2} + c$
解は $x = (-t^{-2} + c)t^3 = -t + ct^3$ c_1,c は任意の定数。

(2) $x'' - 4x' + 4x + 9e^{5t} = 0$

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ これを解いて $\lambda = 2$ の重解
よって斉次の一般解は $x = (c_1t + c_2)e^{2t}$ となる。
特殊解を $x = ae^{5t}$ とすると $x' = 5ae^{5t}$, $x'' = 25ae^{5t}$ これを方程式に代入して
$25ae^{5t} - 20ae^{5t} + 4ae^{5t} + 9e^{5t} = 0$
これより $a = -1$
特殊解は $x = -e^{5t}$
よって一般解は $x = (c_1t + c_2)e^{2t} - e^{5t}$ となる。c_1, c_2 は任意の定数。
斉次の一般解、特殊解の一方のみ正解のときは 3 点。

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

2

次の微分方程式を与えられた初期条件の下で解け。(5 点 $\times 2$)

(1) $x' = t^2x^2$　　$(t = 1$ のとき $x = -3)$

解答

x^2 で割り $\frac{x'}{x^2} = t^2$
積分して $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \int t^2 dt,$
$\frac{-1}{x} = \frac{1}{3}t^3 + c$
初期条件を代入すると $\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} + c,$
$c = 0$
よって解は $x = -3t^{-3}$

(2) $x'' + 16x = 0$　　$(t = 0$ のとき $x = -4,\ x' = 12)$
解答

特性方程式は $\lambda^2 + 16 = 0$ これを解くと $\lambda = \pm 4i$
よって一般解は $x = c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t,$
微分すると $x' = 4c_1 \cos 4t - 4c_2 \sin 4t$
初期条件を代入すると
$$\begin{cases} -4 = c_2 \\ 12 = 4c_1 \end{cases}$$
つまり $c_1 = 3, c_2 = -4$
よって解は $x = 3\sin 4t - 4\cos 4t$

科目	数学	分野	応用数学	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		合計	

$\boxed{1}$

３点 P(1,4,3), Q(−1,5,1), R(3,1,4)がある．次のものを求めよ．（10 点）

(1)$\cos(\angle QPR)$

(2)三角形 PQR の面積

(3)三角形 PQR に垂直な単位ベクトル全て

(4)$(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})\times(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR})$

(1)$\overrightarrow{PQ}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\quad |\overrightarrow{PQ}|=3\qquad \overrightarrow{PR}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\quad |\overrightarrow{PR}|=\sqrt{14}\quad \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-4-3-2=-9$

$\cos(\angle QPR)=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\frac{-9}{3\sqrt{14}}=\frac{-3}{\sqrt{14}}$ (+3)

(2)$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\frac{1}{2}|-5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}|=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (+3)

(3)$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}=\pm\frac{-5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}}{3\sqrt{5}}$ (+2)

(4)$(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})\times(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR})$

$=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PR}=0-\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}+0$

$=-2(-5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})=10\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$ (+2)

$\boxed{2}$

ベクトル場$\mathbf{A}=yz^2\boldsymbol{i}+x^2z\boldsymbol{j}+y^2\boldsymbol{k}$ ， C: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\ (0\le t\le 1)$ で表される曲線がある．
次の問いに答えよ．（10 点）

(1) rot $\mathbf{A}$を求めよ．

(2) 曲線 C に沿っての線積分$\int_C \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$を求めよ．

(1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=(2y-x^2)\boldsymbol{i}+2yz\boldsymbol{j}+(2xz-z^2)\boldsymbol{k}$ (+3　(成分ごとで+1))

(2) 曲線 C に沿って$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=(2t^2-t^2)\boldsymbol{i}+2t^2\cdot t\boldsymbol{j}+(2t\cdot t-t^2)\boldsymbol{k}=t^2\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$ (+3)

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ (+2)

$$\int_C \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1 \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt=\int_0^1(t^2\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})dt=\int_0^1(2t^2+4t^4)dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{4}{5}t^5\right]_0^1=\frac{22}{15}$$

(+2)