科目	数学	分野	微分積分	１枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 × 2)

(1) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

解答

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)^{-\frac{1}{2}}(2x - 1) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

正解を出した後に間違えたとき 3 点。

(2) $y = x \tan^{-1}(x + 1)$

解答

$$y' = \tan^{-1}(x + 1) + x\frac{1}{(x + 1)^2 + 1} = \tan^{-1}(x + 1) + \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$$

2

次の積分を求めよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int (x^2 + 1)^2 dx$

解答

$$\int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C$$

積分定数がないとき 4 点。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x(\sin x + \cos x) dx$

解答

$$\int_0^{\pi} x(\sin x + \cos x) dx = [x(-\cos x + \sin x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x + \sin x) dx \text{(ここまで 2 点)}$$

$$= \pi - [-\sin x - \cos x]_0^{\pi} = \pi - 2$$

科目	数学	分野	微分積分	２枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

3

次の極限を求めよ。(5 点)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{x^3}$$

解答

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{3x^2}=\infty$$

4

$f(x,y)=\log(x^2-y^2)$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1) $f_x(x,y)$
解答
$f_x(x,y)=\dfrac{2x}{x^2-y^2}$　　　$\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}$ でも正解。

(2) $f_y(x,y)$
解答
$f_y(x,y)=\dfrac{-2y}{x^2-y^2}$　　　$\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}$ でも正解。

(3) $f_{xx}(x,y)$
解答
$f_{xx}=\dfrac{2(x^2-y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2}=\dfrac{-2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$　　　$\dfrac{-1}{(x+y)^2}-\dfrac{1}{(x-y)^2}$ でも正解。

(4) $f_{xy}(x,y)$
解答
$f_{xy}=\dfrac{-2x\cdot(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\dfrac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$　　　$\dfrac{-1}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}$ でも正解。

(5) $f_{yy}(x,y)$
解答
$f_{yy}=\dfrac{-2(x^2-y^2)+2y\cdot(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\dfrac{-2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$　　　$\dfrac{-1}{(x+y)^2}-\dfrac{1}{(x-y)^2}$ でも正解。

科目	数学	分野	微分積分	３枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D (x^4+y^4)dxdy$, D は不等式 $0 \leqq y \leqq 1-x, 0 \leqq x \leqq 1$ で表される領域

解答

$$\iint_D (x^4+y^4)dxdy = \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x}(x^4+y^4)dy\right\}dx = \int_0^1 \left[x^4y+\frac{1}{5}y^5\right]_0^{1-x}dx$$
$$= \int_0^1 x^4(1-x)+\frac{1}{5}(1-x)^5dx(\text{ここまでで 5 点})$$
$$= \int_0^1 -\frac{6}{5}x^5+2x^4-2x^3+2x^2-x+\frac{1}{5}dx$$
$$= \left[-\frac{1}{5}x^6+\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy$, D は不等式 $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ で表される領域

解答

極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ に変換すると $1 \leqq r \leqq 2, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる。

よって $\displaystyle\int_1^2 \left\{\int_0^{2\pi} r\log r^2 d\theta\right\}dr = \int_1^2 2r\log r\,[\theta]_0^{2\pi}\,dr = 4\pi\int_1^2 r\log r dr$(ここまでで 5 点)

$$= 4\pi\left\{\left[\frac{1}{2}r^2\log r\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{r}dr\right\} = 2\pi\left\{4\log 2-\left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^2\right\} = 8\pi\log 2-3\pi$$

科目	数学	分野	線形代数	１枚目 ２枚中	受検番号		小計		合計	

1

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & a & -5\\ a & -1 & 5\end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を求めよ。(5 点)

解答

$|A|=1\cdot a\cdot 5+1\cdot(-1)\cdot(-2)+1\cdot(-5)\cdot a-(-2)\cdot a\cdot a-1\cdot 1\cdot 5-1\cdot(-1)\cdot(-5)$
$=5a+2-5a+2a^2-5-5=2a^2-8$

(2) 連立方程式 $\begin{cases}x+y-2z=8\\ x+2y-5z=10\\ 2x-y+5z=10\end{cases}$ の解を求めよ。(5 点)

拡大係数行列を行基本変形させて解く。

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 8\\ 1 & 2 & -5 & 10\\ 2 & -1 & 5 & 10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 8\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & -3 & 9 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 8\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ここまでで 2 点

これは連立方程式 $\begin{cases}x+z=6\\ y-3z=2\end{cases}$ に相当する。$z=t$ を任意の数として、x,y を t で表せば、

$\begin{cases}x=-t+6\\ y=3t+2\\ z=t\end{cases}$ (t は任意の定数)

が解となる。

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

2

行列 $\begin{pmatrix} -29 & 10 \\ -60 & 21 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式は $(-29-\lambda)(21-\lambda)+600=0$
$\lambda^2+8\lambda-9=0$
$(\lambda+9)(\lambda-1)=0$
よって $\lambda=1,-9$ つまり固有値は 1 と -9 (ここまでで 5 点)

$\lambda=1$ のとき固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は
$\begin{pmatrix} -30 & 10 \\ -60 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
を満たすから $-30x+10y=0$
を満たせばよい。

c_1 を任意の定数として $x=c_1$ とすると $y=3c_1$ となる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$($c_1$ は 0 以外の任意の定数) が固有ベクトルである。

$\lambda=-9$ のとき固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は
$\begin{pmatrix} -20 & 10 \\ -60 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
を満たすから $-20x+10y=0$
を満たせばよい。

c_2 を任意の定数として $x=c_2$ とすると $y=2c_2$ となる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$($c_2$ は 0 以外の任意の定数) が固有ベクトルである。

固有値が正しく、固有ベクトルが片方のみ正しいとき 8 点。
固有値が一つのみ正しく、対応する固有ベクトルが正しいとき 5 点。

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

微分方程式の問題では $x' = \dfrac{dx}{dt}, x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ とする。

1

次の微分方程式の一般解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $x' = x\tan t$

解答

$\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt} = \tan t$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \tan t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}dt$

$\log|x| = -\log|\cos t| + c_1$

$\log|x\cos t| = c_1$

$x\cos t = c_2$

よって一般解は $x = \dfrac{c_2}{\cos t}$ (c_1, c_2 は任意の定数。）

(2) $x'' - 11x' + 10x = 10t - 11$

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$

$(\lambda - 10)(\lambda - 1) = 0$

よって特性解は $\lambda = 10, 1$ となり、斉次の一般解は $x = c_1e^t + c_2e^{10t}$ となる。

特殊解を $x = at + b$ とすると $x' = a,\ x'' = 0$ となり、これを代入すると

$-11a + 10(at + b) = 10t - 11$

$10at - 11a + 10b = 10t - 11$

よって $10a = 10, -11a + 10b = -11$ を満たせばよい。この解は $a = 1, b = 0$ となる。よって特殊解は $x = t$ である。以上より一般解は $x = c_1e^t + c_2e^{10t} + t$ である。c_1, c_2 は任意の定数。

斉次の一般解および特殊解の片方のみ正解のときは 3 点。

斉次の一般解および特殊解を求めているのに最終的な答えが未記入のとき 4 点。

t を x と書き間違えていたとき 4 点。

平成２９年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

2

次の微分方程式を与えられた初期条件の下で解け。(5 点 $\times 2$)

(1) $2t^2x' = (x+t)^2$　　$(t=1$ のとき $x=1)$

解答

$x = ut$ とすると $x' = u + u't$ これを方程式に代入すると $2t^2(u+u't) = (ut+t)^2$

$2t^2u + 2u't^3 = u^2t^2 + 2ut^2 + t^2$

$2u't^3 = (u^2+1)t^2$

$\dfrac{2u'}{u^2+1} = \dfrac{1}{t}$

$\displaystyle\int \frac{2}{u^2+1}du = \int \frac{1}{t}dt$

$2\tan^{-1} u = \log|t| + c_1$

$2\tan^{-1} \dfrac{x}{t} = \log|t| + c_1$ ここまでで 3 点

初期条件を代入すると

$2\tan^{-1} 1 = c_1$ つまり $c_1 = \frac{\pi}{2}$

よって $2\tan^{-1} \dfrac{x}{t} = \log|t| + \dfrac{\pi}{2}$

$x = t\tan\left(\frac{1}{2}\log|t| + \frac{\pi}{4}\right)$ も正解。

$\tan^{-1} 1$ を $\frac{\pi}{4}$ にしない、または $\tan^{-1} 1 = \pm\frac{\pi}{4}$ にするのは 4 点。

(2) $x'' = 2x$　　$(t=0$ のとき $x=2, x' = 4\sqrt{2})$

解答

特性方程式は $\lambda^2 = 2$ これを解いて $\lambda = \pm\sqrt{2}$ となる。よって一般解は

$x = c_1e^{\sqrt{2}t} + c_2e^{-\sqrt{2}t}$ となる。$(c_1, c_2$ は任意の定数)

ここまでで 3 点

微分すると $x' = \sqrt{2}c_1e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}c_2e^{-\sqrt{2}t}$

初期条件を代入すると $\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 4\sqrt{2} = \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 \end{cases}$

これを解いて、$c_1 = 3, c_2 = -1$　ここまでで 4 点

よって解は $x = 3e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}$ となる。

科目	数学	分野	応用数学	1枚目 / 1枚中	受検番号		小計		合計	

1

スカラー場$\varphi = xy^3z + 3x^2z^3$ について次のものを求めよ．(10 点)

(1)勾配 $\nabla\varphi$

(2)点 P $(1,-2,1)$ における$\nabla\varphi$ の値　$(\nabla\varphi)_P$

(3)点 P における単位ベクトル $\boldsymbol{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ の方向への方向微分係数

(4)ラプラシアン$\nabla^2\varphi$

(1) $\nabla\varphi = (y^3z + 6xz^3)\boldsymbol{i} + 3xy^2z\boldsymbol{j} + (xy^3 + 9x^2z^2)\boldsymbol{k}$ (+3)

(2) $(\nabla\varphi)_P = \{(-2)^3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1^3\}\boldsymbol{i} + \{3 \cdot 1 \cdot (-2)^2 \cdot 1\}\boldsymbol{j} + \{1 \cdot (-2)^3 + 9 \cdot 1^2 \cdot 1^2\}\boldsymbol{k}$
$= -2\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ (+2)

(3) $(\nabla\varphi)_P \cdot \boldsymbol{u} = (-2\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{4}{3} + 4 - \frac{2}{3} = 2$ (+3)

(4) $\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = 6z^3 + 6xyz + 18x^2z$ (+2)

2

円柱らせん C：$\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}$ $(0 \leq t \leq \pi)$ に沿って，ベクトル場　$\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ の

線積分$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．(10 点)

曲線 C に沿って　$\boldsymbol{A} = 2\sin t\,\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j} + 2\cos t\,\boldsymbol{k}$ (+2)

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -2\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ (+3)

$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^\pi (2\sin t\,\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j} + 2\cos t\,\boldsymbol{k}) \cdot (-2\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})dt$

$= \int_0^\pi (-4\sin^2 t + 6t\cos t + 6\cos t)dt$ (+2)

$= \int_0^\pi 2(\cos 2t - 1)dt + \left([6t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi 6\sin t\,dt\right) + [6\sin t]_0^\pi$

$= [\sin 2t - 2t]_0^\pi + 0 + [6\cos t]_0^\pi + 0 = -2\pi - 12$ (+3)