平成３１年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜 (後期)

数学合計

科目	数学	分野	微分積分	１枚目 / ３枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 ×2)

(1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ ($x \geqq 0$ とする)

解答

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}(\text{ここまででも正解})=\frac{-x^2+1}{2\sqrt{x(x^2+1)}(x^2+1)}$$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{2}\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}$

解答

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+\frac{x}{2}\left\{\cos(\log x)\frac{1}{x}+\sin(\log x)\frac{1}{x}\right\}=\sin(\log x)$$

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2-1)^2}dx$

解答

$x^2-1=t$ とおく。すると $xdx=\frac{1}{2}dt$ となる。よって

$$\int\frac{x}{(x^2-1)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}\frac{dt}{2}=-\frac{1}{2t}+C(\text{ここまでで 3 点})=-\frac{1}{2(x^2-1)}+C$$

積分定数 C がないときは 4 点

(2) $\displaystyle\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$

解答

$$\int_0^1(x-1)e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}dx(\text{ここまでで 2 点})$$

$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(3-e^2)$$

科目	数学	分野	微分積分	２枚目 ３枚中	受検番号		小計	

3

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^3+1)}{\log x}$ を求めよ。(5 点)

解答

ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^3+1)}{\log x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3+1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x^3}}=3$$

4

$f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1) $f_x(x,y)$

解答

$$f_x(x,y)=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

(2) $f_y(x,y)$

解答

$$f_y(x,y)=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

(3) $f_{xx}(x,y)$

解答

$$f_{xx}(x,y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(4) $f_{xy}(x,y)$

解答

$$f_{xy}(x,y)=\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(5) $f_{yy}(x,y)$

解答

$$f_{yy}(x,y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

平成３１年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

科目	数学	分野	微分積分	３枚目／３枚中	受検番号		小計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$, D は不等式 $1 \leqq x+y \leqq 2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で表される領域。

解答

積分範囲は $0 \leqq x \leqq 1$ では $-x+1 \leqq y \leqq -x+2$, $1 \leqq x \leqq 2$ では $0 \leqq y \leqq -x+2$ となる。よって

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{-x+1}^{-x+2} (x+y)dy \right\} dx + \int_1^2 \left\{ \int_0^{-x+2} (x+y)dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{-x+1}^{-x+2} dx + \int_1^2 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{-x+2} dx$$

$$= \int_0^1 \{x(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\}dx + \int_1^2 \{x(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2\}dx (\text{ここまでで 5 点})$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}dx + \int_1^2 (-\frac{1}{2}x^2 + 2)dx = \frac{3}{2} + \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x \right]_1^2 = \frac{3}{2} + 2 - \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy$, D は不等式 $x^2+y^2 \leqq \pi, x \geqq 0, y \geqq 0$ で表される領域。

解答

極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に変換するとヤコビアンは r、範囲は $0 \leqq r \leqq \sqrt{\pi}, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ となる。

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\sqrt{\pi}} r\sin r^2 dr \right\} d\theta (\text{ここまでで 3 点})$$

$r^2 = t$ とすると $rdr = \frac{1}{2}dt$, t の範囲は $0 \leqq t \leqq \pi$ となる。よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\sqrt{\pi}} r\sin r^2 dr \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin t dt \right\} d\theta (\text{ここまでで 7 点})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}\cos t \right]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

平成３１年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

科目	数学	分野	線形代数	１枚目 / ２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

の行列式 $|A|$ を求めよ。(5 点)

解答

$|A| = 2 \cdot 1 \cdot 1 + k \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - k \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 2k$

(2) $k = 1$ のとき、つまり $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

の逆行列を求めよ。(5 点)

解答

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

これより逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ となる。基本変形のミス 1ヶ所３点。2ヶ所以上０点。

余因子で求めるときは、余因子の間違い一つのとき３点。２つ以上間違いの時０点

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 15 & 56 \\ -4 & -15 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式は $\begin{vmatrix} 15-\lambda & 56 \\ -4 & -15-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$ よって固有値は $\lambda = \pm 1$ (ここまで 5 点)

$\lambda = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 14 & 56 \\ -4 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $14x + 56y = 0$ つまり $x = -4y$ よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ のとき $\begin{pmatrix} 16 & 56 \\ -4 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $16x + 56y = 0$ つまり $2x + 7y = 0$ よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

ただし c_1, c_2 は 0 以外の任意の実数。

固有値が両方とも正解で固有ベクトルの片方のみ正解のとき、8 点。固有値が片方のみ正解で対応する固有ベクトルが正解のとき 5 点。固有値が片方のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき 0 点。固有値のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき 5 点。

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目 / ２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の微分方程式を解け。(5 点 ×2)

(1) $t\dfrac{dx}{dt}-2x=t^3e^t$

解答

斉次の方程式 $t\frac{dx}{dt}-2x=0$ を解く。$t\frac{dx}{dt}=2x$ より $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2dt}{t}$

$\log|x|=2\log|t|+c_1$ 斉次の解は $x=c_2t^2$ となる。

$x=ut^2$ とする。$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}t^2+2ut$ これを微分方程式に代入

$t^3\frac{du}{dt}+2ut^2-2ut^2=t^3e^t$

$\frac{du}{dt}=e^t$(ここまでで 3 点) よって $u=e^t+C$ となる。

解は $x=(e^t+C)t^2(c_1,c_2,C$ は任意の定数) である。

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-5\dfrac{dx}{dt}-6x=10e^t$

解答

特性方程式は $\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda-6)(\lambda+1)=0$ より $\lambda=6,-1$ よって斉次の一般解は $x=c_1e^{6t}+c_2e^{-t}$ である。

特殊解を $x=Ae^t$ とする。$\frac{dx}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=Ae^t$ を微分方程式に代入すると $Ae^t-5Ae^t-6Ae^t=10e^t$ これより $A=-1$ となる。

よって特殊解は $x=-e^t$ であり、

一般解は $x=c_1e^{6t}+c_2e^{-t}-e^t$（$c_1,c_2$ は任意の定数）である。

斉次の一般解と特殊解の片方のみ求めているときは 3 点とする。

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

次の微分方程式の与えられた初期条件での解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $tx\dfrac{dx}{dt} = 1$ ($t = 1$ のとき $x = 1$)

解答

$x\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ を積分して $\displaystyle\int x dx = \int \frac{1}{t} dt$

$\frac{1}{2}x^2 = \log|t| + c$

$x = \sqrt{2\log|t| + 2c}$

となる。(ここまでで 3 点) これに初期条件を代入して $2c = 1$ となる。

よって $x = \sqrt{2\log|t| + 1}$ が解である。$x^2 = 2\log|t| + 1$ でも正解とする。また t に絶対値がついていなくても正解とする。

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ ($t = 0$ のときに $x = -1, \dfrac{dx}{dt} = 3$)

解答

特性方程式は $\lambda^2 + 4 = 0$ よって $\lambda = \pm 2i$

一般解は $x = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t$ となる。

微分すると $\frac{dx}{dt} = 2c_1 \cos 2t - 2c_2 \sin 2t$（ここまでで 3 点）

初期条件を代入すると $\begin{cases} c_2 = -1 \\ 2c_1 = 3 \end{cases}$

よって $c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = -1$

特殊解は $x = \frac{3}{2}\sin 2t - \cos 2t$ となる。

科目	数学	分野	応用数学	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		分野計	１枚目のみ

$\boxed{1}$　スカラー場$\varphi = x\log y - x^2z^2$ がある．次のものを求めよ．（10 点）

(1) 勾配 gradφ

(2) 点 P $(3,1,-1)$における$\mathrm{grad}\varphi$の値 $(\mathrm{grad}\varphi)_P$

(3) 点 P における$\boldsymbol{u} = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ 方向への方向微分係数

(4) ラプラシアン $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi$

(5) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi)$

(1)$\mathrm{grad}\varphi = \mathrm{grad}(x\log y - x^2z^2) = (\log y - 2xz^2)\boldsymbol{i} + \frac{x}{y}\boldsymbol{j} - 2x^2z\boldsymbol{k}$ (+2)

(2)$(\mathrm{grad}\varphi)_P = -6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}$ (+2)

(3)$(\mathrm{grad}\varphi)_P \cdot \boldsymbol{u} = 4$ (+2)

(4) $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi = -2z^2 - \frac{x}{y^2} - 2x^2$ (+2)

(5) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{0}$ (+2)

$\boxed{2}$

スカラー場$\varphi = xyz$ がある．

曲線 C:$\boldsymbol{r} = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ $(0 \le t \le \pi/4)$ に沿っての線積分$\int_C \varphi ds$ を求めよ．

ただしここでsは弧長とする．（10 点）

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\sin t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$ (+4)

経路に沿って $\varphi = t\cos t\sin t$ (+2)

曲線 C に沿ってφの線積分

$$\int_C \varphi ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\ t\cos t\sin t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\sin 2t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left[\frac{-t}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t}{2}dt\right\}$$

(+1) (+1)

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}[\sin 2t]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

(+2)