科目	数　学	１枚目 / ３枚中	受験番号		総得点		小計	

1

２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は３点 $(-1, -1), (2, 2), (-2, -6)$ を通っている。a, b, c の値を求めよ。(15 点)

解答

３点の座標を代入すると

$$\begin{cases} -1 = a - b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ -6 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

の連立方程式となる。この方程式を解くと、$a = -1, b = 2, c = 2$ となる。

2

放物線 $y = kx^2 + 6x + 3$ と直線 $y = 2x - k$ が異なる２点で交わるような k の範囲を求めよ。(15 点)

解答

$kx^2 + 6x + 3 = 2x - k$ に異なる２つの実数解があればよい。２次方程式 $kx^2 + 4x + k + 3 = 0$ の判別式 D は $D = 4^2 - 4k(k + 3) = -4k^2 - 12k + 16 = -4(k + 4)(k - 1)$ であるから不等式 $D > 0$ を解くと、$-4 < k < 1$ となる。$k = 0$ のときは放物線でなくなるから、これを除外することとなる。よって答は $-4 < k < 0, 0 < k < 1$ である。$-4 < k < 1$ は 10 点。

3

３条件 $y \leqq x + 2, y + 2x \leqq 5, 2y \geqq x - 5$ をみたす実数の組 (x, y) で $x + y$ が最大になるときの (x, y) とその最大値を求めよ。(15 点)

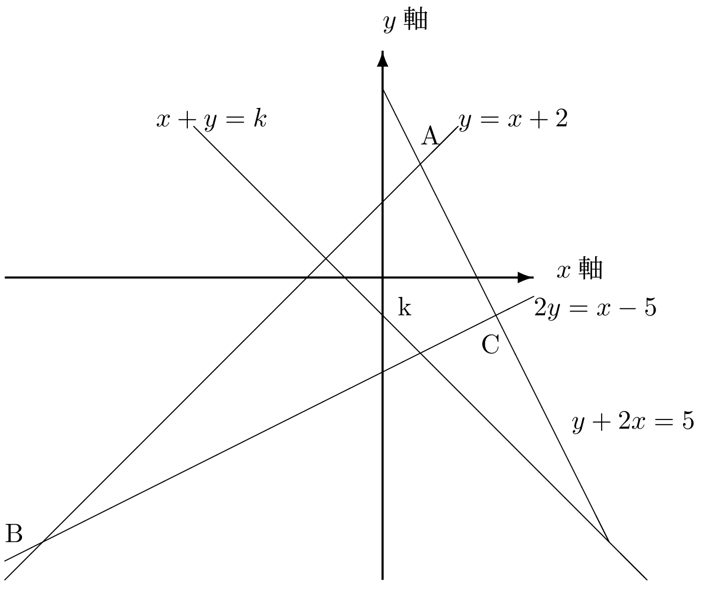
解答

条件を満たす点は図の三角形 ABC の周と内部になる。$x + y = k$ は傾きが -1 で y 切片が k の直線になる。三角形を通る直線で k が最も大きくなるのは図の A の点を通る時である。A の座標は連立方程式

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y + 2x = 5 \end{cases}$$

の解で, 連立方程式を解いて $(x, y) = (1, 3)$ となる。

よって $(x, y) = (1, 3)$ のときに最大値 4 となる。



4

θ は第 4 象限の角で $\cos\theta = \frac{2}{5}$ である。$\sin\theta, \tan\theta$ を求めよ。(15 点)

解答

第 4 象限なので、sin も tan も負である。よって

$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

5

方程式 $\log_2(x+7) + \log_2(x-1) = \log_2(5x-1)$ を解け。(15 点)

解答

$\log_2(x+7)(x-1) = \log_2(5x-1)$ より

$(x+7)(x-1) = 5x-1$

$x^2+6x-7 = 5x-1$

$x^2+x-6 = (x+3)(x-2) = 0$

よって $x = -3, 2$ $x = -3$ は真数条件を満たさないので、解は $x = 2$。 $x = -3, 2$ となっているときは 7 点。

6

方程式 $9^x - 8\cdot 3^x - 9 = 0$ を解け。(15 点)

解答

$3^x = X$ とすると、

$X^2 - 8X - 9 = 0$

$(X-9)(X+1) = 0$

$X = 9, -1$

ここで $3^x = -1$ になることはないので、$3^x = 9$, よって $x = 2$

7

連立方程式 $\begin{cases} 2x^2+4x+y^2 = 10 \\ x^2+2x+2y^2 = 11 \end{cases}$ を解け。(15 点)

解答

$2x^2+4x+y^2 = 10$ を A, $x^2+2x+2y^2 = 11$ を B とする。

$A-2B$ を計算すると、$-3y^2 = -12$, これより $y^2 = 4$, $y = \pm 2$

B に代入すると、$x^2+2x+8 = 11$, $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1) = 0$ よって $x = 1, -3$

解は $x = 1, y = \pm 2$, および $x = -3, y = \pm 2$

8

三角形 ABC がある。BC=4cm, $\angle B = 30°, \angle C = 105°$ であった。三角形 ABC の面積を求めよ。(15 点)

解答

$\angle A = 180° - 30° - 105° = 45°$

加法定理により

$\sin 105° = \sin(45° + 60°) = \sin 45° \cos 60° + \cos 45° \sin 60°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ となる。

正弦定理により $\dfrac{AC}{\sin 30°} = \dfrac{4}{\sin 45°}$ これより $AC = \dfrac{4 \sin 30°}{\sin 45°} = \dfrac{4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$

面積は $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} \times \sin 105° = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = 2 + 2\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

9

(1) 関数 $y = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ に点 $(1, -3)$ で接する接線の式を求めよ。(15 点)

解答

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ とする。$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2,\ f'(1) = -5$

よって接線の式は $y = -5(x-1) - 3$

整理して $y = -5x + 2$ が接線である。

(2) (1) で得られた接線と、関数のグラフに囲まれた図形の面積を求めよ。(15 点)

解答

まず、交点を求める。$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = -5x + 2$

$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2(x-3) = 0$ より、交点は $x = 3$ である。($x = 1$ は接点)

面積は

$$\int_1^3 \{-5x + 2 - (x^3 - 5x^2 + 2x - 1)\}dx = \int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 7x + 3)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= -\frac{81}{4} + 45 - \frac{63}{2} + 9 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} - \frac{7}{2} + 3\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$