

# 計測工学10

## データの補間 スプライン補間

1

# スプライン補間法

- 混合スプライン
  - 連続した4点を1組にした補間公式を作成し、中央2点間のみを用いる。
  - データ点を必ず通る。
  - データ点にて、両側の区間の2階微分係数が一致する。
  - データは等間隔でなくてはならない。
- ベーススプライン
  - データ点は等間隔。
  - データ点で、1階および2階微分が一致する。
  - 補間が連続的になるが、データ点を必ずしも通らない。
  - 連続した4点から3次式を求め、中央2点間を補間。
- 雲形定規スプライン
  - データ点を必ず通る。
  - データ点にて、両側の区間の1階微分係数が一致する。
- 3次スプライン
  - データ点を必ず通る。
  - データ点にて、両側区間の1階微分係数および2階微分係数が一致する。

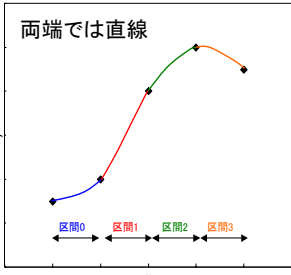
# 予備知識 Excelで行列の計算をする

- 配列数式を使う
  - 配列数式とは複数の行と列(行列)に対する演算を行うもの
- 行列積、逆行列のための関数の利用
  - MMULT関数 行列の積
  - MINVERSE関数 逆行列を求める
- 演習用Excelシートで行列の計算をやってみる

14

# 3次スプライン補間

- N+1個のデータのためにN個の区間のためのN個の3次式を求める
- 式には以下の条件をつける
  - 全てのデータ点を通る
  - 各々の区分補間式は、境界点の1次導関数は連続
  - 各々の区分補間式は、境界点の2次導関数は連続
  - 両端の2次導関数の値を0 (自然スプライン)



19

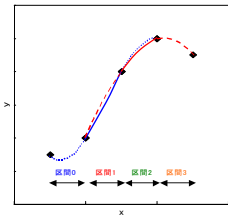
# 3次スプライン補間とラグランジュの補間の比較

- 2点のデータ点間の補完のために
  - 3次スプライン
    - 2点を通る3次式
    - 隣り合う区間で傾きと傾きの変化が連続
  - ラグランジュ補間
    - 4点を通る3次式
    - 隣り合う区間で特に条件はない

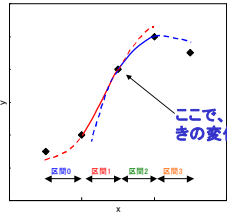
20

# 3次スプライン補間とラグランジュの補間の比較

ラグランジュの補間



3次スプライン

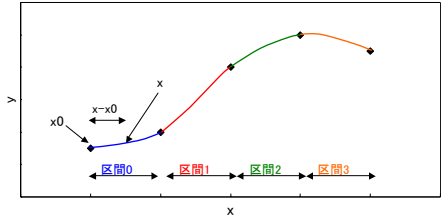


21

### 3次スプライン補間の計算法(計算式の導出は省略)

- N+1個のデータに対しN個の区間でのN個の3次式(jは区間の番号)

$$y = a_j(x - x_j)^3 + b_j(x - x_j)^2 + c_j(x - x_j) + d_j$$



22

### 3次スプライン補間の計算法(計算式の導出は省略)

- $x=x_j$ における2次導関数の値を $u_j$ とすると

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & h_{N-2} & 2(h_{N-2} + h_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{bmatrix}$$

ただし

$$h_j = x_{j+1} - x_j \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

$$v_j = 6 \left[ \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} \right) - \left( \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} \right) \right]$$

- この連立方程式を解くことで $u_j$ を求める。また条件より、 $u_0=u_N=0$ とする。

23

### 3次スプライン補間の計算法(計算式の導出は省略)

- 求めた $u_j$ より各区間の係数a,b,c,dを以下の式で決定する

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{(u_{j+1} - u_j)}{6h_j} \\ b_j &= \frac{u_j}{2} \\ c_j &= \frac{1}{h_j}(y_{j+1} - y_j) - \frac{h_j}{6}(2u_j + u_{j+1}) \\ d_j &= y_j \end{aligned}$$

- この係数を使い、各区間の補間を以下の式で行う

$$y = a_j(x - x_j)^3 + b_j(x - x_j)^2 + c_j(x - x_j) + d_j$$

24

### 3次スプライン演習

- Excelシートを使って3次スプライン補間を試す

25