平成 24 年度 試験形式 1S・1K 名列番号 ＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿

裏面は表面の続き 計算機等持込不可 解答は用紙に納め，計算過程や正確な記号を詳しく書くこと．

1 [~~30~~ 点] 次の解 u を (2 項まで) 求めよ． 31

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (0 \leqq x, y \leqq 12)$$

$u(0,y)=0,\ u(12,y)=0,$

(1) $u(x,0)=0,\ u(x,12)=\sin\frac{\pi x}{12} + 5\sin\frac{\pi x}{4}$

(2)

【次の内容を書くこと】

Step1：変数分離法　2 つの常微分方程式

Step2：1 つの常微分方程式の境界条件に対する固有値と固有関数　もう 1 つの常微分方程式の解

Step3：重ね合わせの原理　問題の一般解　残りの (初期，境界) 条件により係数決定 (フーリエ級数の利用)

Step1 $u = X(x)Y(y)$ とおく

$X''Y + XY'' = 0 \qquad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k$ (定数)

$$\begin{cases} X'' = kX \\ Y'' = -kY \end{cases}$$

8

Step2 $u(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \quad X(0)=0$

$u(12,y) = X(12)Y(y) = 0 \quad X(12)=0$

$k \geqq 0$ のとき 意味のない解

$k = -\lambda^2 < 0$ のとき $X'' = -\lambda^2 X$

$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ (A, B は定数)

$X(0)=0$ より $A=0$

$X(12)=0$ より $B\sin 12\lambda = 0$

$12\lambda = n\pi \ (n=1,2,\cdots) \quad \lambda = \frac{n\pi}{12}$

$X = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{12}x\right)$ (c_n は定数)

$k = -\lambda^2 = -\left(\frac{n\pi}{12}\right)^2$ のとき $Y'' = \left(\frac{n\pi}{12}\right)^2 Y$

$Y = a_n e^{+\frac{n\pi}{12}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{12}y}$ (a_n, b_n は定数)

12

Step3 $u = XY = \sin\left(\frac{n\pi}{12}x\right)\left(a_n e^{\frac{n\pi}{12}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{12}y}\right)$

$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{12}x\right)\left(a_n e^{\frac{n\pi}{12}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{12}y}\right)$

$u(x,0)=0$ より $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{12}x\right)(a_n + b_n) = 0$

$b_n = -a_n$

$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{12}x\right) a_n \left(e^{\frac{n\pi}{12}y} - e^{-\frac{n\pi}{12}y}\right)$

$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{12}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{12}y\right) \quad (a_n^* = 2a_n)$

6

$u(x,12) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \sinh(n\pi)\sin\frac{n\pi}{12}x$

(1) $u(x,12) = \sin\frac{\pi x}{12} + 5\sin\frac{\pi x}{4}$ とおいて

$a_1^* \sinh\pi = 1 \qquad a_1^* = \frac{1}{\sinh\pi}$

$a_3^* \sinh 3\pi = 5 \qquad a_3^* = \frac{5}{\sinh 3\pi}$

$n \neq 1, 3$ のとき $a_n^* = 0$

$$u = \frac{1}{\sinh\pi}\sin\frac{\pi x}{12}\sinh\frac{\pi y}{12} + \frac{5}{\sinh 3\pi}\sin\frac{\pi x}{4}\sinh\frac{\pi y}{4}$$

5

直交性

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ L & (m = n) \end{cases}$$

を使って，$0 \leqq x \leqq L$ での関数の級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

の係数 b_n が得られることが分かる．