2 フーリエ積分・変換により，次の解を求めよ．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & (0<x<1) \\ -1 & (-1<x<0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

10

2a [~~9~~点]

フーリエ積分による解【次の内容を書くこと】

- Step1：変数分離　2つの常微分方程式
- Step2：2つの常微分方程式の解
- Step3：重ね合わせの原理による一般解
  初期条件による係数決定

7

2b [~~4~~点]

フーリエ変換による解【次の内容を書くこと】

- Step1：フーリエ変換の利用 (変数分離)
- Step2：フーリエ変換の常微分方程式の解
- Step3：フーリエ逆変換による解 (重ね合わせ)
  (初期条件による係数決定まではしなくて良い)

2a Step1 $u = X(x)T(t)$

$XT' = c^2 X'' T \qquad \frac{T'}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = k$ (定数)

$$\begin{cases} X'' = kX \\ T' = c^2 k T \end{cases}$$ ②

Step2 $k \geq 0$ のとき 意味のない解

$k = -\lambda^2 < 0$ のとき $\quad X'' = -\lambda^2 X$

$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \quad$ (A, Bは定数, λによる)

$T' = -c^2\lambda^2 T \qquad T = e^{-c^2\lambda^2 t}$ ③

Step3. $u = XT$

$$u = \int_0^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, e^{-c^2\lambda^2 t}\, d\lambda$$

$$u(x,0) = \int_0^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, d\lambda$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\uparrow 奇}{u(x,0)}\, \underset{\uparrow 偶}{\cos\lambda x}\, dx = 0$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\nwarrow 偶}{u(x,0)\sin\lambda x}\, dx$$ ③

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 1\cdot\sin\lambda x\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos\lambda x}{\lambda}\right]_0^1 = \frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}$$

2c [2点] 次の問に答えよ．

$$u = \int_0^\infty \frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}\sin\lambda x\, e^{-c^2\lambda^2 t}\, d\lambda$$ ②

2b Step.1 $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\lambda,t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} e^{i\lambda x}\, d\lambda = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}\, \underbrace{\frac{\partial^2 e^{i\lambda x}}{\partial x^2}}_{= (i\lambda)^2 e^{i\lambda x}}\, d\lambda$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c^2\lambda^2 \hat{u}$$ ②

Step.2 $\hat{u} = C(\lambda)e^{-c^2\lambda^2 t}$ (C(λ)は定数で λによる) ①

Step.3

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{-c^2\lambda^2 t} e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$C(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$ ②

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^{0} (-1) e^{-i\lambda x}\, dx + \int_0^1 1\cdot e^{-i\lambda x}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{-e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\right]_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1 - e^{+i\lambda} - e^{-i\lambda} + 1}{i\lambda}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2(1-\cos\lambda)}{i\lambda}$$ ②