$\boxed{\mathbf{3}}$ [27 点] 次の解を求めよ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (0<r<3,\ t>0)$$

境界条件 $u(3,t)=0 \qquad r=0$ で有界

初期条件 $u(r,0)=f(r)$

【次の内容を書くこと】

$\boxed{\text{Step 1}}$：変数分離　２つの常微分方程式.

$\boxed{\text{Step 2}}$：２つの方程式の解　ベッセル関数

$\boxed{\text{Step 3}}$：重ね合わせによる一般解
係数決定 (ベッセル級数の利用)

$\boxed{\text{Step 1}}$ $u=R(r)T(t)$ とおく.

$$RT' = 2\left(R''T + \frac{1}{r}R'T\right)$$

$$\frac{T'}{2T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = k \quad (\text{定数})$$

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}R' = kR \\ T' = 2kT \end{cases}$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ $u(3,t)=R(3)T(t)=0$ より $R(3)=0$

$$k=-\lambda^2<0 \qquad R''+\frac{1}{r}R' = -\lambda^2 R$$

$$r^2R''+rR'+\lambda^2r^2R=0$$

$$R=c_1J_0(\lambda r)+c_2Y_0(\lambda r)$$

$r=0$ で有界　$(c_2=0)$　$R=c_1J_0(\lambda r)$

$R(3)=0$ より $c_1J_0(3\lambda)=0$

$3\lambda=\alpha_m$(零点)　$(m=1,2,3,\cdots)$

$$\lambda=\frac{\alpha_m}{3} \qquad R=c_mJ_0\left(\frac{\alpha_m}{3}r\right)$$

$$k=-\lambda^2=-\left(\frac{\alpha_m}{3}\right)^2<0$$

$$T'=-2\left(\frac{\alpha_m}{3}\right)^2 T$$

$$T=a_me^{-2\left(\frac{\alpha_m}{3}\right)^2t}=a_me^{-\frac{2\alpha_m^2}{9}t}$$

$\boxed{\text{Step 3}}$ $u=RT=A_mJ_0\left(\dfrac{\alpha_m}{3}r\right)e^{-\frac{2\alpha_m^2}{9}t}$

$$u=\sum_{p=1}^{\infty}A_mJ_0\left(\frac{\alpha_m}{3}r\right)e^{-\frac{2\alpha_m^2}{9}t}$$

$$u(r,0)=\sum_{p=1}^{\infty}A_mJ_0\left(\frac{\alpha_m}{3}r\right)$$

$u(r,0)=f(x)$ と比べて,

$$A_m=\frac{2}{3^2J_1^2(\alpha_m)}\int_0^3 rJ_n\left(\frac{\alpha_m}{3}r\right)f(r)dr$$

よって,

$$u=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9J_1^2(\alpha_m)}\int_0^3 rJ_n\left(\frac{\alpha_m}{3}r\right)f(r)dr\right) \times J_0\left(\frac{\alpha_m}{3}r\right)e^{-\frac{2\alpha_m^2}{9}t}$$

直交性

$$\int_0^R rJ_n\left(\frac{\lambda_k}{R}r\right)J_n\left(\frac{\lambda_l}{R}r\right)dr=0 \quad (k\neq l)$$

$$\int_0^R rJ_n^2\left(\frac{\lambda_k}{R}r\right)dr=\frac{R^2}{2}J_{n+1}^2(\lambda_k)$$

を使って，級数 $f(r)=\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}A_pJ_n\left(\frac{\lambda_p}{R}r\right)$ の係数が得られることが分かる.