$\boxed{4}$ [15 点] 次の解を求めよ.

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right]=0$$

$(0\leqq r<2,\ 0\leqq\phi\leqq\pi)$ u は有界 θ に無関係

$u(2,\phi)=1-\cos^2\phi$

【次の内容を書くこと】

$\boxed{\text{Step 1}}$：変数分離 ２つの常微分方程式.

$\boxed{\text{Step 2}}$：２つの方程式の解 ルジャンドル関数

意味がある解になる $k=n(n+1)$ を用いて, R の方程式について, $R=r^a$ として, 有界である解 $R=r^n$ となる結果を使ってよい.

Φ の方程式について, その解を求めよ.

$\boxed{\text{Step 3}}$：重ね合わせによる一般解

係数決定 (ルジャンドル級数の利用)

一般解 u について, 境界を考え，$x=\cos\phi$ とおいて, 境界条件を満たすようにルジャンドル級数の係数 A_n を求め, 解 u を求めよ.

$\boxed{\text{Step 1}}$ $\partial u/\partial\theta=0$ $u=R(r)\Phi(\phi)$

$$\frac{1}{r^2}\left[\Phi(r^2R')'+\frac{R}{\sin\phi}(\sin\phi\Phi')'\right]=0$$

$$\frac{1}{R}(r^2R')'=-\frac{1}{\Phi\sin\phi}(\sin\phi\Phi')'=k \quad (\text{定数})$$

$$\begin{cases}(r^2R')'=kR\\(\sin\phi\Phi')'=-k\sin\phi\Phi\end{cases}$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ $k=n(n+1)$ $R=Ar^n$

$(\sin\phi\Phi')'+n(n+1)\sin\phi\Phi=0$

$\Phi=P_n(\cos\phi)$

$\boxed{\text{Step 3}}$ $u=R\Phi=A_nr^nP_n(\cos\phi)$

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\phi)$$

$$u(2,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n2^nP_n(\cos\phi)$$

$x=\cos\phi$ とおいて，$u(2,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n2^nP_n(x)$

. . . .

$$u(2,\phi)=f(\phi)=1-\cos^2\phi=1-x^2$$
$$=1-\left(\frac{2P_2(x)+1}{3}\right)=-\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{2}{3}P_0(x)$$ と比べて,

$A_02^0=\frac{2}{3}$ $A_22^2=-\frac{2}{3}$ $n\neq 0,2$ のとき $A_n=0$

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\phi)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}r^2P_2(\cos\phi)$$

$\boxed{5}$ [8 点] (1) $I_1=\int_0^{\infty}x^5e^{-x}dx$ をガンマ関数を用いて求めよ.

(2) $I_2=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$ をベータ関数を用いて求めよ.

(1) $n-1=5$ より $n=6$

$$I_1=\Gamma(6)=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)=120$$

(2) $I_2=\int_0^1 x^2(2-x)^{-\frac{1}{2}}dx$ と書き直す.

$m-1=2$ より $n=3$

$n-1=-\frac{1}{2}$ より $n=\frac{1}{2}$

$$I_2=B\left(3,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$
$$=\frac{2\cdot1\cdot\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{16}{15}$$

直交性

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0 \quad (m\neq n)$$

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$$

を使って，級数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kP_k(x)$ の係数が得られることが分かる.

例 $P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2},$