$\boxed{\mathbf{4}}$ [15 点] 次の解を求めよ.

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right]=0$$

$(0\leqq r<2,\ 0\leqq\phi\leqq\pi)$ u は有界 θ に無関係

$u(2,\phi)=1-\cos^2\phi$

【次の内容を書くこと】

$\boxed{\text{Step 1}}$：変数分離 2つの常微分方程式.

$\boxed{\text{Step 2}}$：2つの方程式の解 ルジャンドル関数

意味がある解になる $k=n(n+1)$ を用いて, R の方程式について, $R=r^a$ として, 有界である解 $R=r^n$ となる結果を使ってよい.

Φ の方程式について, その解を求めよ.

$\boxed{\text{Step 3}}$：重ね合わせによる一般解

係数決定 (ルジャンドル級数の利用)

一般解 u について, 境界を考え, $x=\cos\phi$ とおいて, 境界条件を満たすようにルジャンドル級数の係数 A_n を求め, 解 u を求めよ.

[答案]

$\boxed{\mathbf{5}}$ [8 点] (1) $I_1=\displaystyle\int_0^\infty x^5e^{-x}dx$ をガンマ関数を用いて求めよ.

(2) $I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$ をベータ関数を用いて求めよ.

[答案]

直交性

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx=0\ \ (m\neq n)$$

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$$

を使って，級数 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^\infty A_kP_k(x)$ の係数が得られることが分かる.

例 $P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{2},$

平成 24 年度 試験形式 1S・1K 名列番号 __________ 氏名 ____________________

裏面は表面の続き | 計算機等持込不可 | 解答は用紙に納め, 計算過程や正確な記号を詳しく書くこと.

1 [31 点] 次の解 u を (2 項まで) 求めよ.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (0 \leqq x, y \leqq 12)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(12, y) = 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 12) = \sin \frac{\pi x}{12} + 5 \sin \frac{\pi x}{4}$$

【次の内容を書くこと】

Step1 : 変数分離法　2 つの常微分方程式

Step2 : 1つの常微分方程式の境界条件
に対する固有値と固有関数
もう1つの常微分方程式の解

Step3 : 重ね合わせの原理　問題の一般解
残りの (初期，境界) 条件により
係数決定 (フーリエ級数の利用)

[答案]

直交性

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ L & (m = n) \end{cases}$$

を使って，$0 \leqq x \leqq L$ での関数の級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

の係数 b_n が得られることが分かる.

2 フーリエ積分・変換により，次の解を求めよ．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & (0<x<1) \\ -1 & (-1<x<0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

2a [10 点]

フーリエ積分による解**【次の内容を書くこと】**

Step1：変数分離　2 つの常微分方程式

Step2：2 つの常微分方程式の解

Step3：重ね合わせの原理による一般解
初期条件による係数決定

2b [7 点]

フーリエ変換による解**【次の内容を書くこと】**

Step1：フーリエ変換の利用 (変数分離)

Step2：フーリエ変換の常微分方程式の解

Step3：フーリエ逆変換による解 (重ね合わせ)
(初期条件による係数決定まではしなくて良い)

[答案]

2c [2 点] 次の問に答えよ．

. . . .

$\boxed{\mathbf{3}}$ [27 点] 次の解を求めよ．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (0<r<3,\ t>0)$$

境界条件 $u(3,t)=0$ 　　$r=0$ で有界

初期条件 $u(r,0)=f(r)$

【次の内容を書くこと】

$\boxed{\text{Step 1}}$：変数分離　２つの常微分方程式.

$\boxed{\text{Step 2}}$：２つの方程式の解　ベッセル関数

$\boxed{\text{Step 3}}$：重ね合わせによる一般解

係数決定 (ベッセル級数の利用)

[答案]

直交性

$$\int_0^R r J_n\left(\frac{\lambda_k}{R}r\right) J_n\left(\frac{\lambda_l}{R}r\right) dr = 0 \ \ (k \neq l)$$

$$\int_0^R r J_n^2\left(\frac{\lambda_k}{R}r\right) dr = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_k)$$

を使って，級数 $f(r) = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n\left(\frac{\lambda_p}{R}r\right)$

の係数が得られることが分かる．