計測工学
-測定の誤差と精度2-

計測工学

2009年5月17日　Ⅰ限目

授業内容

- 2.1　数値計算における誤差
- 2.2　計算過程での誤差
- 2.3　測定の精度

授業内容

- 2.1　数値計算における誤差
- 2.2　計算過程での誤差
- 2.3　測定の精度

2.1　数値計算における誤差

- 2.1.1　誤差とは
- 2.1.2　四捨五入と切り捨てによる誤差
- 2.1.3　有効数字
- 2.1.4　有効数字のしくみ

2.1.2 四捨五入と切り捨てによる誤差

- 数値の丸め：四捨五入が一般的

(2) 与えられた数値が2つの隣り合う整数倍：
偶数倍の方を選択

e.g. 12.25, 12.45

数値の丸め方 JIS Z8401

c)もし与えられた数値に等しく近い、
二つの隣り合う整数倍(5の倍数)がある場合は、
二つの異なる規則が用いられる。

1.丸めた数値を偶数の整数倍
2.大きい数値

例1　丸めの幅：0.1

与えられた数値	丸めた数値
12.25	**12.2**
12.35	**12.4**

備考1．規則Aが一般的には望ましい。
たとえば一連の測定値をこの方法で処理すると
丸めによる誤差が最小になるという特別な利点がある。

数値の丸め方 JIS Z8401

しかし、**(4)**と記述が被る…

新たな理解が追加された時点で報告する。

授業内容

- 2.1　数値計算における誤差
- 2.2　計算過程での誤差
- 2.3　測定の精度

2.3.1　誤差の種類

(1)　系統誤差

(2)　偶然誤差

(3)　間違い誤差

(4)　誤差の公理

2.3.1 誤差の種類

(1) 系統誤差

ある測定環境下で一定のかたよりを与える誤差

(2) 偶然誤差

種々の細かな原因に起因するばらつき誤差

(3) 間違い誤差

測定者に起因する人的誤差(ヒューマンエラー)

(4) 誤差の公理

2.3.1　4)　誤差の公理

1)　小さい誤差が起こる確率は大きい誤差が起こる確率よりも大きい

2)　絶対値が同じで正負の誤差が起こる確率は相等しい

3)　はなはだ大きな誤差の起こる確率は零

全ての誤差は正負の両極限値の間に存在

2.3.3 誤差の正規分布

(1) 正規(ガウス)分布とは

ガウスは誤差の公理を基に算術平均の原理を用いて偶然誤差の確率分布を導いた。

真の平均値μと標準偏差σによって正規分布曲線f(x)が与えられる。

(2.8)式を参照

=: 定義 N(μ,σ^2):平均値μ、分散σ^2の正規分布

2.3.3 誤差の正規分布

1) 正規(ガウス)分布とは

確度指数h: 正確度を表す指数

$$\sigma = 1 / (\sqrt{2} * h) \qquad (2.9)$$

…hが大きいほどσは小さい

2.3.3 誤差の正規分布

(2) 正規分布で使用される各種パラメータ

1) 母平均(μ :population mean):母集団の平均

2) 真値(T):精度を最良にして得る値

母集団の平均を真値とみなす $\mu = T$

2.3.3 誤差の正規分布

(2) 正規分布で使用される各種パラメータ

3) 推定値(estimated value): 標本(資料)平均値

4) 標本平均($\overline{M}$): 標本(資料)M_iのN回測定の平均算術平均(arithmetic mean)が一般的に精度が高いと考えられ、測定回数が多ければ真値に限りなく近づく(大数の法則)

2.3.3　誤差の正規分布

(2)　正規分布で使用される各種パラメータ(図2.3)

5)　誤差(e_i: error)

$e_i = M_i - T$

誤差率 : $\pm(e_i / T) \times 100\%$

6)　かたより(δ : bias):母平均と真値の差

$\delta = \mu - T$

2.3.3 誤差の正規分布

(2) 正規分布で使用される各種パラメータ

7) 残差(r_i: residue):測定値と標本平均値との差

$r_i = M_i - \overline{M}$ または $x_i - \overline{x}$

8) 偏差(d_i: deviation):測定値と母平均値との差

$d_i = M_i - \mu$

2.3.4 精密さ･正確さ

1) 精密さ(precision)：
ばらつき(偶然誤差)の小さい程度

⇒良い、悪いで判断

2) 正確さ(trueness)：
かたより(系統誤差)の小さい程度

⇒良い、悪いで判断

3) 精度(accuracy):測定量の真の値との一致の度合い。上記の2つを含む

2.3.5 信頼性(reliability)

(1) 信頼度
(2) 器差
(3) 公差
(4) 許容差
(5) 定格
(6) 再現性

2.3.5 信頼性

(7) 安定さ

(8) 感度

(9) 分解能

(10) 確度

(11) 最確値

2.4 精度の表し方

- 2.4.1 ばらつきの程度
- 2.4.2 誤差の定義式
- 2.4.3 確率誤差の例

2.4 精度の表し方

- 2.4.1 ばらつきの程度
- 2.4.2 誤差の定義式
- 2.4.3 確率誤差の例

2.4.1　ばらつきの程度

- 精度：P25 2.3.4(3)の定義
- 真値Tは不明

測定値の母集団から得られる標本(測定値)：x_i

測定回数：$i = 1, 2, \ldots, n$

標本平均値：式(2.10)

とそれぞれを定義

2.4.1 ばらつきの程度

(1) 平方和

(2) 分散

(3) 母標準偏差

(4) 不偏分散

(5) 標本標準偏差

(6) 区間

2.4.1 ばらつきの程度

(1) 平方和
(2) 分散
(3) 母標準偏差
(4) 不偏分散
(5) 標本標準偏差
(6) 区間

2.4.1 (1) 平方和

$$\sum r^2_i = \sum (x_i - \overline{x})^2 \qquad (2.15)$$

残差の平方の総和

$\overline{\mathrm{x}}$:算術平均値

2.4.1 ばらつきの程度

(1) 平方和

(2) 分散

(3) 母標準偏差

(4) 不偏分散

(5) 標本標準偏差

(6) 区間

2.4.1　(2) 分散

偏差または残差の二乗の算術平均

母分散(σ^2):偏差d_iの二乗平均　母集団単位

標本分散(s^2):残差r_iの二乗平均　標本単位

2.4.1 ばらつきの程度

(1) 平方和
(2) 分散
(3) 母標準偏差
(4) 不偏分散
(5) 標本標準偏差
(6) 区間

2.4.1　(3) 母標準偏差

σ : 分散の平方根

$$\sigma = \pm\sqrt{(\Sigma(x_i - \mu)^2 / n)} \qquad (2.16)$$

2.4.1　ばらつきの程度

(1) 平方和
(2) 分散
(3) 母標準偏差
(4) 不偏分散
(5) 標本標準偏差
(6) 区間

2.4.1　(4) 不偏分散

V: 多数の測定値を用いた、統計的に偏りのない**母分散の推定値**

$$V = s^2 / (n - 1) \qquad (2.17)$$

$$= \hat{\sigma}^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1) \qquad (2.18)$$

$\hat{\sigma}$: σの推定値

2.4.1　ばらつきの程度

(1) 平方和

(2) 分散

(3) 母標準偏差

(4) 不偏分散

(5) 標本標準偏差

(6) 区間

2.4.1　(5) 標本標準偏差

母集団の標準偏差はわからない

標本標準偏差：$\sqrt{V}$

$$\sqrt{V} = \hat{\sigma} = \pm\sqrt{\left(\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2 / (n-1)\right)} \quad (2.19)$$

n > 10であれば$\sqrt{V}$を$\hat{\sigma}$に用いられる

2.4.1 ばらつきの程度

(1) 平方和
(2) 分散
(3) 母標準偏差
(4) 不偏分散
(5) 標本標準偏差
(6) 区間

2.4.1　(6) 区間

全ての測定値のうち、ある割合がある範囲内に入る区間

- ・測定値の分布が正規
- ・母平均 μ
- ・母標準偏差 σ

が判明しているとき

$\mu \pm \sigma$: 68.3%　　　$\mu \pm 2\sigma$: 95.4%

$\mu \pm 3\sigma$: 99.7%

2.4.1　(2) 分散

$\mu \pm \sigma$: 68.3%

$\mu \pm 2\sigma$: 95.4%

$\mu \pm 3\sigma$: 99.7%

1. 多数の標本からμとσを求める
2. 製品の良品を$\mu \pm 3\sigma$とできるように管理

2.4 精度の表し方

- 2.4.1 ばらつきの程度
- 2.4.2 誤差の定義式
- 2.4.3 確率誤差の例

2.4.2 誤差の定義式

(1) 平均二乗法(平方誤差):不偏分散式(2.18)

(2) 確率誤差または中央誤差

(3) 確率誤差の係数

2.4.2 誤差の定義式

(1) 平均二乗法(平方誤差):不偏分散式(2.18)

(2) 確率誤差または中央誤差

(3) 確率誤差の係数

(2) 確率誤差または中央誤差

確率誤差(中央誤差):算術平均値の信用を判断する基準

誤差曲線の総面積 / 2となる-E～Eの誤差を中央誤差という

hE = 0.4769363 = 恒数　ただしh:確度指数

(2) 確率誤差または中央誤差

$hE = 0.4769363 =$ 恒数　ただしh:確度指数

hが大ならEは小さい：測定がより正確

もっとも信頼し得る値x

$x =$ (算術平均値 $\bar{x}$) ±(確率誤差E)　にて表現

(2) 確率誤差または中央誤差

確率誤差Eと測定回数の関係

$E = \varepsilon / \sqrt{n}$　ε :1測定の確率誤差　　(2.22)

$\sqrt{n}$(測定回数)にしたがって精度が向上

(2) 確率誤差または中央誤差

1測定の確率誤差 (2.23)

$\varepsilon = \pm 0.6745 * \sqrt{\ (\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2 / (n - 1))}$

全測定の確率誤差(ベッセルの公式) (2.24)

$E = \pm 0.6745 * \sqrt{\ (\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2 / n(n - 1))}$

確率誤差の数値: $\bar{1}$～2桁

2.4　精度の表し方

- 2.4.1　ばらつきの程度
- 2.4.2　誤差の定義式
- 2.4.3　確率誤差の例

2.4.3 確率誤差の例

- P.29 の例題について理解する