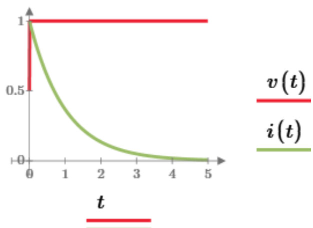
１．指数関数のラプラス変換

指数関数のラプラス変換は次の式(1.1)のとおりである。また 2 つの指数関数の差分のラプラス変換は式(1.2)となる。従って、最初の式(1.1)で $a=0$ であれば、単位階段関数$\Phi(\mathrm{t})=1$ のラプラス変換が $\frac{1}{s}$ であること、式(1.2)で $a=0, \mathrm{b}=1$ であれば $1-e^{-t}$ が、$a=1, \mathrm{b}=2$ であれば $e^{-t}-e^{-2t}$ が時間領域の関数となる。

$$e^{-a\cdot t} \xrightarrow{laplace} \frac{1}{a+s} \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b} \xrightarrow{factor} -\frac{a-b}{(b+s)\cdot(a+s)} \xrightarrow{invlaplace} e^{-(a\cdot t)}-e^{-(b\cdot t)} \tag{1.2}$$

［例題 1. 1］ $t=0$ において、直流電源 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t})=e^{-t}$ [A] となる電気回路を求めよ



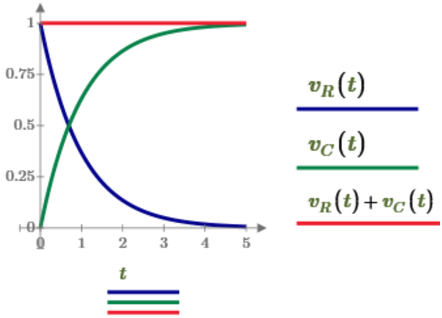
［解］この電流波形をラプラス変換すると、$I(s)=\frac{1}{s+1}=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}$ となる。従って、$E(s)=\frac{1}{s}$、$Z(s)=R+\frac{1}{sC}$、$R=1\Omega$、$C=1\mathrm{F}$ の RC 直列回路に直流電圧 1[V]を印加したときの直流過渡応答が答えの電流波形となる。

確認問題1. 1 この電流の最大値とその時間を求めよ。［ 1 A, 0 s ］

確認問題1. 2 この回路の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

$$v_R(t) := i(t)\cdot R \rightarrow e^{-t} \quad 、\quad v_C(t) := \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \rightarrow 1-e^{-t}$$

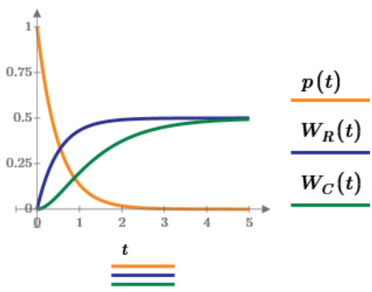
$$v_R(t)+v_C(t)\xrightarrow[\;]{assume,t\geq 0 \atop simplify} e^{-t}-e^{-t}+1$$



確認問題1.3　　　　この回路で消費されるエネルギーとコンデンサに蓄えられるエネルギーをそれぞれ求めよ。また、それらの最終値を求めよ。

$$p(t):=i(t)^2\cdot R\xrightarrow{simplify}e^{-2\cdot t}$$

$$W_R(t):=\int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\xrightarrow{simplify}\frac{1}{2}-\frac{e^{-2\cdot t}}{2}$$、$$W_C(t):=\frac{1}{2}\cdot C\cdot v_C(t)^2\xrightarrow{simplify}\frac{\left(e^{-t}-1\right)^2}{2}$$

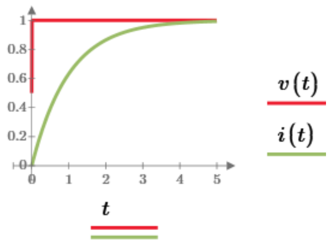


$W_R(\infty)\rightarrow\frac{1}{2}$、$W_C(\infty)\rightarrow\frac{1}{2}$

従って、最終的にコンデンサに蓄えられるエネルギーとその間に抵抗で消費されたエネルギーは等しいことが分かる。

確認問題1.4　　　　この問題が、印加電圧が指数関数 $e(\mathrm{t})=e^{-t}\ [V]$ の時の回路の電流応答であるとして、電気回路を求めよ。[Z(s)=R、$R=1\Omega$ の回路]

［例題 1.2］　$t=0$ において、直流電源 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t})=1-e^{-t}$ [A] となる電気回路を求めよ



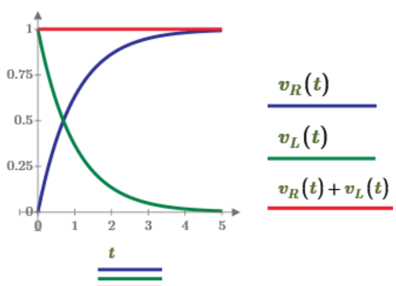
［解］この電流波形をラプラス変換すると、$I(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{\frac{1}{s}}{1+s}$ となる。従って、$E(s)=\frac{1}{s}$、$Z(s)=R+sL$、$R=1\Omega$、$L=1\mathrm{H}$ の RL 直列回路に直流電圧 1[V] を印加したときの直流過渡応答が答えの電流波形となる。

確認問題1.5　　　この電流の最大値とその時間を求めよ。[1 A, ∞ s]

確認問題1.6　　　この回路の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

$v_R(t):=i(t)\cdot R\rightarrow 1-e^{-t}$ 、 $v_L(t):=L\cdot i'(t)\rightarrow e^{-t}$ 、

$$v_R(t)+v_L(t)\xrightarrow[\ ]{\substack{assume,t\geq 0\\ simplify}} e^{-t}-e^{-t}+1$$

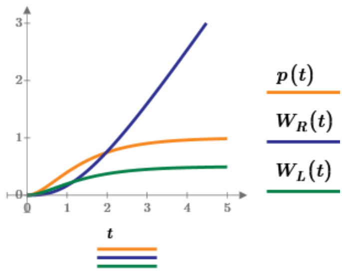


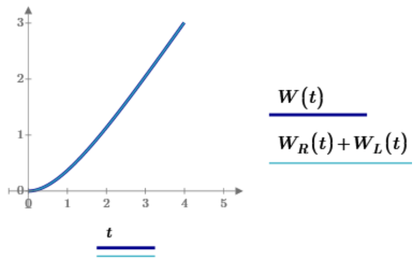
確認問題1.7　　　この回路で消費されるエネルギーとコイルに蓄えられるエネ

ルギーをそれぞれ求めよ。また、それらの最終値を求めよ。次に、電源の供給したエネルギーと、回路で消費または保存されたエネルギーの関係、L があることにより回路が消費できなかったエネルギーの関係を求めよ。

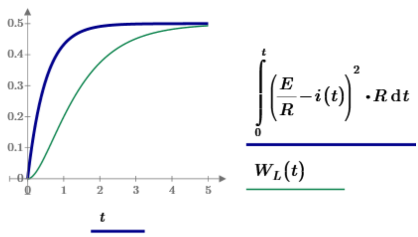
$$W_R(t):=\int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow{simplify} t+2\cdot e^{-t}-\frac{e^{-2\cdot t}}{2}-\frac{3}{2}$$ 、 $$W_L(t):=\frac{1}{2}\cdot L\cdot i(t)^2 \xrightarrow{simplify} \frac{\left(e^{-t}-1\right)^2}{2}$$

$$W(t):=\int_0^t i(\tau)\cdot 1\,\mathrm{d}\tau \rightarrow t+e^{-t}-1$$ 、 $$W_R(\infty)\rightarrow\infty$$ 、 $$W_L(\infty)\rightarrow\frac{1}{2}$$



、


電源の供給したエネルギーと、回路で消費および保存されたエネルギーの和の関係は、当然等しくなる。また、L があることにより回路が消費できなかったエネルギーは下記となる。

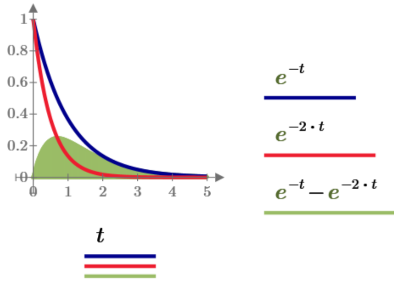


、
$$\int_0^\infty\left(\frac{E}{R}-i(t)\right)^2\cdot R\,\mathrm{d}t\rightarrow\frac{1}{2}$$

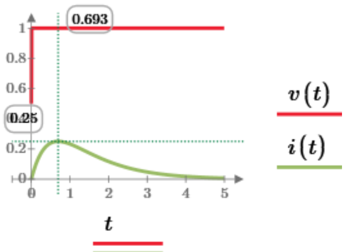
従って、最終的にコイルに蓄えられるエネルギーと、その間に抵抗で L があるために消費されなかったエネルギーは等しいことが分かる。

確認問題1.8　　この問題が、印加電圧が指数関数 $e(t)=e^{-t}\,[V]$ の時の回路の電流応答であるとして、電気回路を求めよ。[Z(s)=sL、　L=1H　の回路]

［例題 1. 3］ $t=0$ から直流 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t})=e^{-t}-e^{-2t}$ [A] となる電気回路を求めよ



［解］この電流波形をラプラス変換すると、$I(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{\frac{1}{s}}{s+3+\frac{2}{s}}$ となる。従って、$E(s)=\frac{1}{s}$、$Z(s)=sL+R+\frac{1}{sC}$、$R=3\Omega$、$L=1\mathrm{H}$、$C=\frac{1}{2}\mathrm{F}$ の RLC 直列回路に直流電圧 1[V]を印加したときの過渡応答が答えの電流波形となる。



確認問題1. 9　　この電流の最大値とその時間を求めよ。[0.25A、 ln(2) [s]]

$i'(t)=0 \xrightarrow{solve,t} \ln(2)$ 、 $i(\ln(2))=0.25$

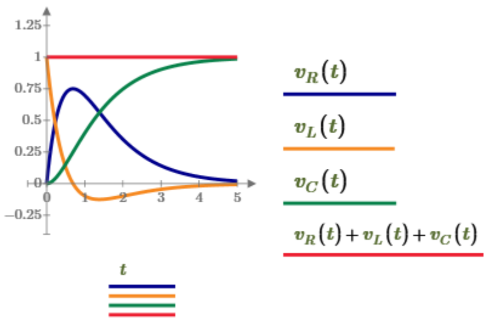
確認問題1. 10　　この回路の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

$v_R(t):=i(t)\cdot R \rightarrow 3\cdot e^{-t}-3\cdot e^{-2\cdot t}$ 、 $v_L(t):=L\cdot i'(t) \rightarrow 2\cdot e^{-2\cdot t}-e^{-t}$

$$v_C(t) := \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)\,d\tau \rightarrow e^{-2\cdot t} - 2\cdot e^{-t} + 1$$

、

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \xrightarrow{simplify} 3\cdot e^{-2\cdot t} - 3\cdot e^{-t} + 3\cdot e^{-t} - 3\cdot e^{-2\cdot t} + 1$$



、 $v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 1$

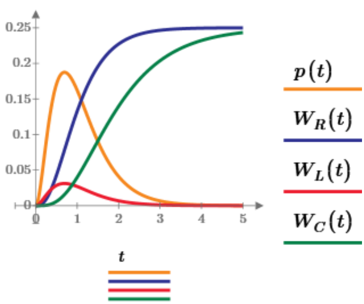
確認問題1. 11 この回路で消費または蓄えられるエネルギーを求めよ。

$$p(t) := i(t)^2 \cdot R \xrightarrow{simplify} 3\cdot e^{-2\cdot t} \cdot \left(e^{-t} - 1\right)^2$$ 、

$$W_R(t) := \int_0^t p(\tau)\,d\tau \xrightarrow{simplify} 2\cdot\left(e^{-2\cdot t}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3\cdot e^{-4\cdot t}}{4} - \frac{3\cdot e^{-2\cdot t}}{2} + \frac{1}{4}$$

、

$$W_L(t) := \frac{1}{2}\cdot L \cdot i(t)^2 \xrightarrow{simplify} \frac{e^{-2\cdot t}\cdot\left(e^{-t}-1\right)^2}{2}$$ 、 $$W_C(t) := \frac{1}{2}\cdot C\cdot v_C(t)^2 \xrightarrow{simplify} \frac{\left(e^{-t}-1\right)^4}{4}$$ 、



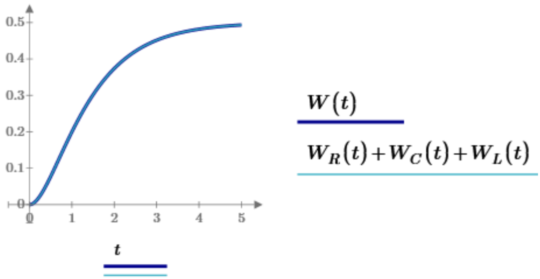
、 $W_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{4}$ 、 $W_C(\infty) \rightarrow \frac{1}{4}$ 、 $W_L(\infty) \rightarrow 0$

従って、RLC 回路に於いても、最終的にコンデンサに蓄えられるエネル

ギーとその間に抵抗で消費されたエネルギーは等しいことが分かる。

確認問題1.12 電源の供給したエネルギーと、3 素子のエネルギーの関係を考察せよ。 なお、電源の供給したエネルギーは下記の通りである。

$$W(t) := \int_0^t i(\tau)\cdot 1\,\mathrm{d}\tau \rightarrow \frac{e^{-2\cdot t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}$$



全エネルギーは、

となり、「電源の供給したエネルギー＝負荷で消費または蓄えられたエネルギーの和」であることが確認できる。

確認問題1.13 この問題が、印加電圧が指数関数 $e(\mathrm{t}) = e^{-t}\ [V]$ の時の回路の電流応答であるとして、電気回路を求めよ。[Z(s)=R+sL、$R = 2\Omega$、 L = 1H の直列回路]