２．インパルス応答とインディシャル応答の関係

　一般にある電気回路(LTI システム)の応答を考えるとき、そのインパルス応答やインディシャル応答が回路の特性を表すものとして用いられる。インパルス応答は $\Delta(\mathrm{t})\ [V]$ 印加時の応答であり、$t=0$ において積分値が 1 となるインパルスを入力したときの応答である。インディシャル応答は $\Phi(\mathrm{t})\ [V]$ として、インパルスを積分した単位階段関数印加時の応答である。これは、前節の直流$1\ [V]$ 印加時の過渡応答のことである。そこでインディシャル応答が前節で求めた電流の場合の、各電気回路のインパルス応答を、前節の各電流波形を微分することにより求めてみる。

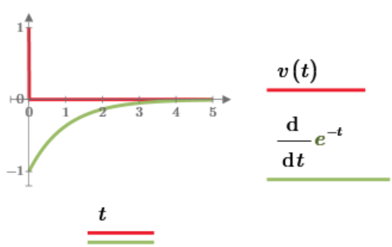
$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t)\,\mathrm{d}t \to 1 \tag{1.3}$$

［例題 2. 1］　$t=0$ において、直流電源 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t})=e^{-t}$ [A] となる電気回路は、$Z(s)=R+\frac{1}{sC}$、$R=1\Omega$、$C=1\mathrm{F}$ の RC 直列回路であった。この回路のインパルス応答を求めよ。

［解］ この回路のインパルス応答は、$I(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{s}}$ となる。従って

$$I(s) := \frac{1}{1+\frac{1}{s}} \xrightarrow{invlaplace} \Delta(t) - e^{-t}$$

がこの回路のインパルス応答となる。$t=0$ で積分値が 1 となるインパルス電流が流れていることに注意が必要である。



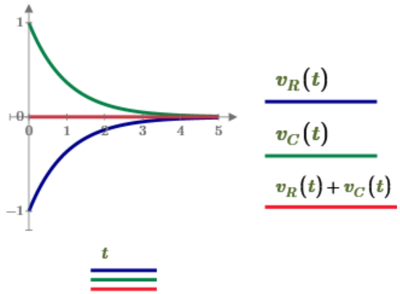
確認問題 2.1　この電流の最大値とその時間を求めよ。[∞ A、0 s]

確認問題 2.2　この電流の最小値とその時間を求めよ。[-1A、0 s]

確認問題 2.3　この回路の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間 $t>0$ でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

$$v_R(t) := i(t)\cdot R \rightarrow \Delta(t) - e^{-t}$$ 、 $$v_C(t) := \frac{1+\int_0^t i(t)\,dt}{C} \rightarrow e^{-t}$$

$$v_R(t)+v_C(t) \rightarrow \Delta(t)+e^{-t}-e^{-t}$$ 、

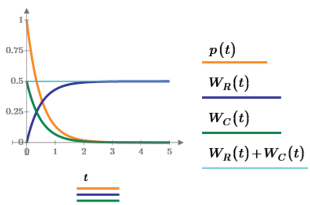


$t>0$

確認問題 2.4　$t>0$ において、この回路で消費されるエネルギーとコンデンサに蓄えられるエネルギーをそれぞれ求めよ。また、それらの最終値を求めよ。

$$p(t) := i(t)^2\cdot R \xrightarrow{simplify} e^{-2\cdot t}$$

$$W_R(t) := \int_0^t p(\tau)\,d\tau \xrightarrow{simplify} \frac{1}{2}-\frac{e^{-2\cdot t}}{2}$$ 、 $$W_C(t) := \frac{1}{2}\cdot C\cdot v_C(t)^2 \xrightarrow{simplify} \frac{e^{-2\cdot t}}{2}$$



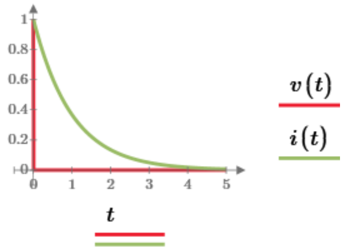
$W_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{2}$ 、 $W_C(0) \rightarrow \frac{1}{2}$ 、 $W_C(\infty) \rightarrow 0$

従って、$t=0$ において最初にコンデンサに蓄えられていたエネルギーと t

> 0 に抵抗で消費されたエネルギーは等しいことが分かる。

確認問題 2.5　この問題が、印加電圧が指数関数 $e(\mathrm{t}) = e^{-t}\,[V]$ の時の回路の電流応答であるとして、電気回路を求めよ。[$Z(s) = \frac{1}{sC}$、$C = 1\mathrm{F}$ の回路]

[例題 2.2]　$t = 0$ において、直流電源 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t}) = 1 - e^{-t}\,[\mathrm{A}]$ となる電気回路は$R = 1\Omega$、$L = 1\mathrm{H}$ の RL 直列回路であった。この回路のインパルス応答を求めよ

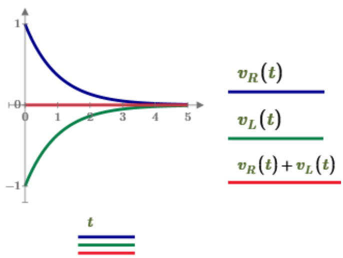


[解] この電流波形をラプラス変換すると、$I(s) = \frac{1}{s+1}$ となる。従って、$Z(s) = R + sL$、$R = 1\Omega$、$L = 1\mathrm{H}$ の RL 直列回路にインパルス電圧を印加すると答えの過渡電流波形となる。

確認問題 2.6　この電流の最大値とその時間を求めよ。[1 A、0 s]

確認問題 2.7　この回路の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

$v_R(t) := i(t)\cdot R \rightarrow e^{-t}$ 、 $v_L(t) := L\cdot i'(t) \rightarrow -e^{-t}$ 、 $v_R(t)+v_L(t) \rightarrow e^{-t}-e^{-t}$

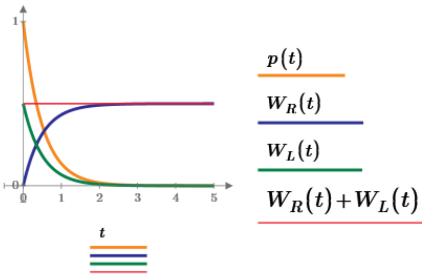


確認問題 2.8　この回路で消費されるエネルギーとコイルに蓄えられるエネルギーをそれぞれ求めよ。また、それらの最終値を求めよ。

$$p(t) := i(t)^2 \cdot R \xrightarrow{simplify} e^{-2\cdot t}$$

$$W_R(t) := \int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow{simplify} \frac{1}{2} - \frac{e^{-2\cdot t}}{2}$$、$W_R(0) \to 0$、$W_R(\infty) \to \frac{1}{2}$

$$W_L(t) := \frac{1}{2}\cdot L \cdot i(t)^2 \xrightarrow{simplify} \frac{e^{-2\cdot t}}{2}$$、$W_L(0) \to \frac{1}{2}$、$W_L(\infty) \to 0$



$t = 0$ において 1A が流れていた RL 回路の電源 off の過渡現象と同じ結果となる。また、R で消費したエネルギーと L に蓄えられているエネルギーの和は常に一定であり、それは最初に L が有していたエネルギーである。

確認問題 2.9　この問題が、印加電圧が指数関数 $e(\mathrm{t}) = e^{-t}\ [V]$ の時の回路の電流応答であるとして、電気回路を求めよ。[$I(s) := \frac{1}{1+s} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1}$ Z(s)=R、R=1 Ω の回路]

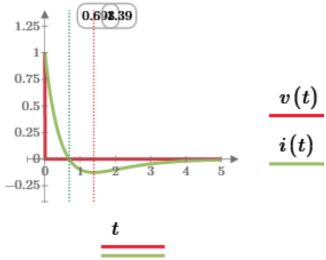
[例題 2. 3]　$t = 0$ から直流 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t}) = e^{-t} - e^{-2t}$ [A] となる電気回路は$Z(s) = sL + R + \frac{1}{sC}$、$R = 3\Omega$、$L = 1\mathrm{H}$、$C = \frac{1}{2}\mathrm{F}$ の RLC 直列回路であった。この回路のインパルス応答を求めよ

[解] この電流波形をラプラス変換すると、$I(s) = \frac{1}{s+3+\frac{2}{s}}$ となる。従って、この RLC

直列回路のインパルス応答はこの逆ラプラス変換の下記過渡電流応答が答えの波形

$$I(s):=\frac{1}{s+3+\frac{2}{s}}\xrightarrow{invlaplace}2\cdot e^{-2\cdot t}-e^{-t}$$

となる。



確認問題 2.10　この電流の最大値とその時間を求めよ。[1A、0 s]

確認問題 2.11　この電流の最小値とその時間を求めよ。[-0.125A、1.386 s]

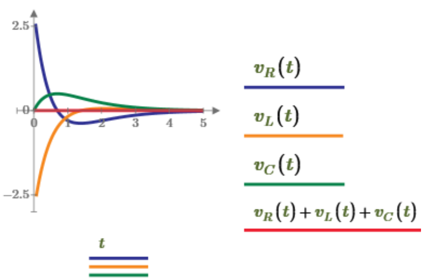
$$i'(t)=0\xrightarrow[]{solve,t \atop float,4}1.386$$、$$i(1.386)=-0.125$$

確認問題 2.12　この回路の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

$$v_R(t):=i(t)\cdot R\rightarrow 6\cdot e^{-2\cdot t}-3\cdot e^{-t}$$、$$v_L(t):=L\cdot i'(t)\rightarrow e^{-t}-4\cdot e^{-2\cdot t}$$

$$v_C(t):=\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau\rightarrow 2\cdot e^{-t}-2\cdot e^{-2\cdot t}$$、

$$v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)\xrightarrow{assume,t\geq 0 \atop simplify}3\cdot e^{-t}-6\cdot e^{-2\cdot t}-3\cdot e^{-t}+6\cdot e^{-2\cdot t}$$



、$$v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=0$$

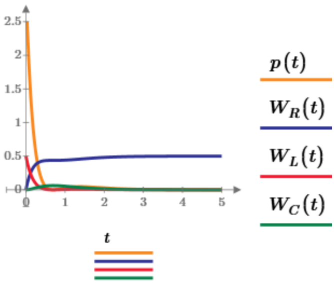
確認問題 2.13　この回路で消費または蓄えられるエネルギーを求めよ。

$$p(t):=i(t)^2\cdot R\xrightarrow{simplify}3\cdot e^{-2\cdot t}+12\cdot e^{-4\cdot t}-12\cdot\left(e^{-2\cdot t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

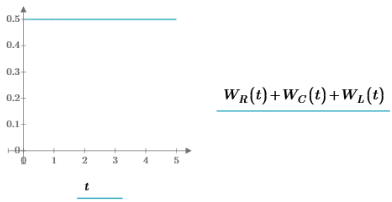
$$W_R(t):=\int_0^t p(\tau)\,d\tau\xrightarrow{simplify}4\cdot\left(e^{-2\cdot t}\right)^{\frac{3}{2}}-3\cdot e^{-4\cdot t}-\frac{3\cdot e^{-2\cdot t}}{2}+\frac{1}{2}$$

$$W_L(t):=\frac{1}{2}\cdot L\cdot i(t)^2\xrightarrow{simplify}\frac{e^{-2\cdot t}}{2}+2\cdot e^{-4\cdot t}-2\cdot\left(e^{-2\cdot t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$W_C(t):=\frac{1}{2}\cdot C\cdot v_C(t)^2\xrightarrow{simplify}4\cdot e^{-3\cdot t}\cdot\left(\frac{e^{-t}}{4}+\frac{e^{t}}{4}-\frac{1}{2}\right)$$



、



$W_L(0)\rightarrow\frac{1}{2}$ 、 $W_R(\infty)\rightarrow\frac{1}{2}$

従って、RLC 回路に於いても、最初 L に与えられたエネルギーは最終的に抵抗で消費され、回路全体のエネルギーは保存されることが分かる。

確認問題 2.14　この問題が、印加電圧が指数関数 $e(\mathrm{t})=e^{-t}\ [V]$ の時の回路の電流応答であるとして、電気回路を求めよ。[$I(s):=\frac{1}{s+3+\frac{2}{s}}=\frac{s}{(s+1)\cdot(s+2)}=\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{s+2}{s}}=\frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{2}{s}}$,

$Z(s)=R+\frac{1}{sC}$、$R=1\Omega$、$\mathrm{C}=\frac{1}{2}$F の CR 直列回路]