３．正弦波応答と余弦波応答の関係

一般にある電気回路(LTI システム)の応答を考えるとき、そのインパルス応答やインディシャル応答が回路の特性を表すものとして用いられる。インパルス応答は $\Delta(\mathrm{t})\ [V]$ 印加時の応答であり、 $t=0$ において積分値が 1 となるインパルスを入力したときの応答である。インディシャル応答は $\Phi(\mathrm{t})\ [V]$ として、インパルスを積分した単位階段関数印加時の応答である。そこで、正弦波応答を微分すると余弦波応答となるか、前節までの各電気回路の正弦波応答電流波形を微分することにより確認してみる。

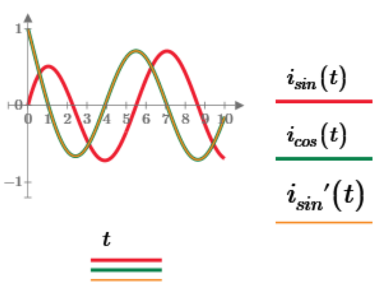
$$\sin(t) \xrightarrow{laplace} \frac{1}{s^2+1} 、\quad \cos(t) \xrightarrow{laplace} \frac{s}{s^2+1} \tag{1.4}$$

[例題 3. 1]　$t=0$ において、直流電源 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t})=e^{-t}\ [\mathrm{A}]$ となる電気回路は、$Z(s)=R+\frac{1}{sC}$、$R=1\Omega$、$C=1\mathrm{F}$ の RC 直列回路であった。この回路の正弦波応答と余弦波応答を求め、前者の微分波形が後者となるか確認せよ。

[解] この回路の正弦波過渡応答と余弦波過渡応答および、前者の微分波形は、

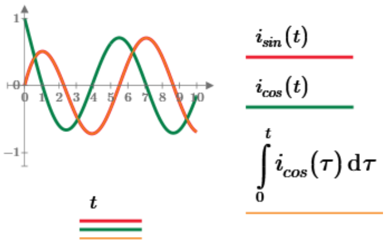
$$I_{sin}(s) := \frac{\frac{1}{s^2+1}}{1+\frac{1}{s}} \xrightarrow{invlaplace} \frac{\cos(t)}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t)}{2} 、\quad I_{cos}(s) := \frac{\frac{s}{s^2+1}}{1+\frac{1}{s}} \xrightarrow{invlaplace} \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\cos(t)}{2} - \frac{\sin(t)}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\cos(t)}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t)}{2}\right) \rightarrow \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\cos(t)}{2} - \frac{\sin(t)}{2}$$



となり、入力信号が微分されると過渡応答波形も微分されることが分かる。

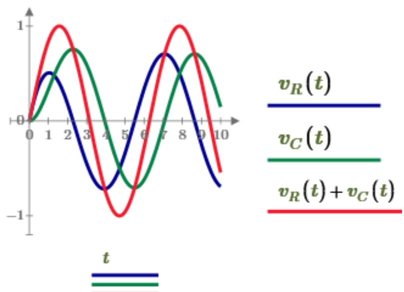
確認問題 3.1　逆に余弦波応答を積分すると正弦波応答になることを確認せよ。



確認問題 3.2　この回路の正弦波応答時の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間 $t>0$ でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

$$v_R(t) := i(t)\cdot R \rightarrow \frac{\cos(t)}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$ 、 $$v_C(t) := \frac{\int_0^t i(t)\,dt}{C} \rightarrow \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$

$$v_R(t) + v_C(t) \xrightarrow{simplify} \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$



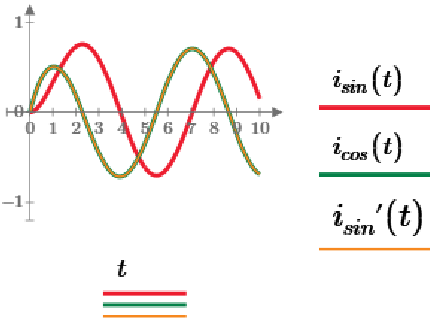
［例題 3. 2］　$t=0$ において、直流電源 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(t)=1-e^{-t}$ [A] となる電気回路は$R=1\Omega$、$L=1\mathrm{H}$ の RL 直列回路であった。この回路の正弦波応答と余弦波応答を求め、前者の微分波形が後者となるか確認せよ。

［解］ この回路の正弦波過渡応答と余弦波過渡応答および、前者の微分波形は、

$$I_{sin}(s) := \frac{\frac{1}{s^2+1}}{s+1} \xrightarrow{invlaplace} \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$

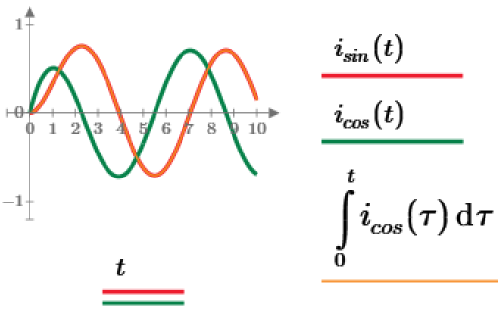
$$I_{cos}(s) := \frac{\frac{s}{s^2+1}}{s+1} \xrightarrow{invlaplace} \frac{\cos(t)}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}\right) \rightarrow \frac{\cos(t)}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$



となり、入力電圧波形を微分すると過渡応答電流波形も微分されることが分かる。

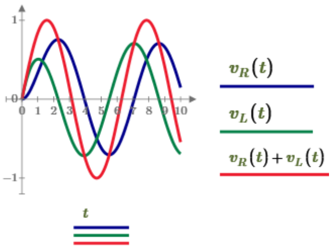
確認問題 3.3　逆に余弦波応答を積分すると正弦波応答になることを確認せよ。



確認問題 3.4　この回路の正弦波応答時の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間 $t>0$ でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

$$v_R(t) := i(t) \cdot R \rightarrow \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$ 、 $$v_L(t) := L \cdot i'(t) \rightarrow \frac{\cos(t)}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$

$$v_R(t)+v_L(t) \rightarrow \frac{e^{-t}}{2}-\frac{e^{-t}}{2}+\frac{\cos(t)}{2}-\frac{\cos(t)}{2}+\frac{\sin(t)}{2}+\frac{\sin(t)}{2}$$



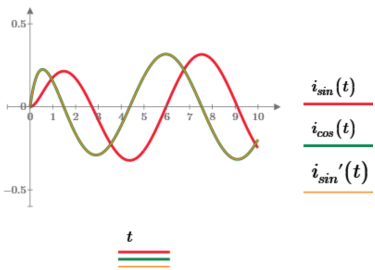
[例題 3. 3]　$t=0$ から直流 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t})=e^{-t}-e^{-2t}$ [A] となる電気回路は$Z(s)=sL+R+\frac{1}{sC}$、$R=3\Omega$、$L=1\mathrm{H}$、$C=\frac{1}{2}\mathrm{F}$ の RLC 直列回路であった。この回路の正弦波応答と余弦波応答を求め、前者の微分波形が後者となるか確認せよ。

[解] この回路の正弦波過渡応答と余弦波過渡応答および、前者の微分波形は、

$$I_{sin}(s):=\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s+3+\frac{2}{s}} \xrightarrow{invlaplace} \frac{2\cdot e^{-2\cdot t}}{5}-\frac{e^{-t}}{2}+\frac{\cos(t)}{10}+\frac{3\cdot\sin(t)}{10}$$

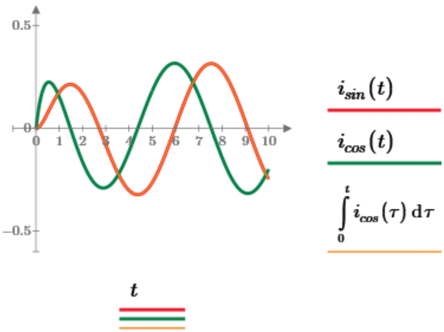
$$I_{cos}(s):=\frac{\frac{s}{s^2+1}}{s+3+\frac{2}{s}} \xrightarrow{invlaplace} \frac{e^{-t}}{2}-\frac{4\cdot e^{-2\cdot t}}{5}+\frac{3\cdot\cos(t)}{10}-\frac{\sin(t)}{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\cdot e^{-2\cdot t}}{5}-\frac{e^{-t}}{2}+\frac{\cos(t)}{10}+\frac{3\cdot\sin(t)}{10}\right) \rightarrow \frac{e^{-t}}{2}-\frac{4\cdot e^{-2\cdot t}}{5}+\frac{3\cdot\cos(t)}{10}-\frac{\sin(t)}{10}$$



となり、RLC 回路に於いても電圧波形の微分の応答は過渡電流も微分となる。

確認問題 3.5　逆に余弦波応答を積分すると正弦波応答になることを確認せよ。



確認問題 3.6　この回路の正弦波応答時の各素子の電圧降下をそれぞれ求め、任意の時間 $t>0$ でキルヒホッフの第 2 法則が成り立っていることを確かめよ。

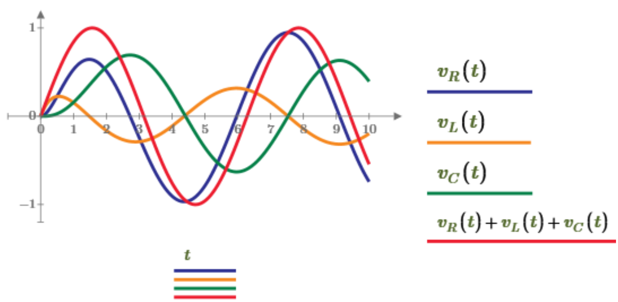
$$v_R(t) := i(t) \cdot R \rightarrow \frac{6 \cdot e^{-2 \cdot t}}{5} - \frac{3 \cdot e^{-t}}{2} + \frac{3 \cdot \cos(t)}{10} + \frac{9 \cdot \sin(t)}{10}$$

$$v_L(t) := L \cdot i'(t) \rightarrow \frac{e^{-t}}{2} - \frac{4 \cdot e^{-2 \cdot t}}{5} + \frac{3 \cdot \cos(t)}{10} - \frac{\sin(t)}{10}$$

$$v_C(t) := \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)\,d\tau \rightarrow e^{-t} - \frac{2 \cdot e^{-2 \cdot t}}{5} - \frac{3 \cdot \cos(t)}{5} + \frac{\sin(t)}{5}$$

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \xrightarrow{simplify} \frac{3 \cdot e^{-t}}{2} - \frac{6 \cdot e^{-2 \cdot t}}{5} - \frac{3 \cdot e^{-t}}{2} + \frac{6 \cdot e^{-2 \cdot t}}{5} - \frac{3 \cdot \cos(t)}{10} + \frac{3 \cdot \cos(t)}{10} + \frac{\sin(t)}{10} + \frac{9 \cdot \sin(t)}{10}$$

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = sin(t)$$



キルヒホッフの第 2 法則は過渡応答に対しても任意の時間で成り立っている。

確認問題 3.7　この回路の正弦波応答時の各素子のエネルギーをそれぞれ求め、任意の時間 $t>0$ で、電源の供給したエネルギーが、各素子の消費または蓄えているエネルギーの和であることを確かめよ。

$$p(t) := i(t)^2 \cdot R \xrightarrow{simplify} \frac{3 \cdot \left(4 \cdot e^{-2 \cdot t} - 5 \cdot e^{-t} + \cos(t) + 3 \cdot \sin(t)\right)^2}{100}$$

$$W_R(t) := \int_0^t p(\tau)\, \mathrm{d}\tau \xrightarrow{simplify} \frac{3 \cdot t}{20} - \frac{9 \cdot \cos(2 \cdot t)}{200} - \frac{3 \cdot e^{-2 \cdot t}}{8} + \frac{2 \cdot e^{-3 \cdot t}}{5} - \frac{3 \cdot e^{-4 \cdot t}}{25} - \frac{3 \cdot \sin(2 \cdot t)}{50} + \frac{3 \cdot e^{-t}}{\ldots}$$

$$W_C(t) := \frac{1}{2} \cdot C \cdot v_C(t)^2 \xrightarrow{simplify} \frac{\left(5 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2 \cdot t} - 3 \cdot \cos(t) + \sin(t)\right)^2}{100}$$

$$W_L(t) := \frac{1}{2} \cdot L \cdot i(t)^2 \xrightarrow{simplify} \frac{\left(4 \cdot e^{-2 \cdot t} - 5 \cdot e^{-t} + \cos(t) + 3 \cdot \sin(t)\right)^2}{200}$$