４．インディシャル応答とインパルス応答の関係

一般にある電気回路(LTI システム)の応答を考えるとき、そのインパルス応答やインディシャル応答が回路の特性を表すものとして用いられる。インパルス応答は $\Delta(\mathrm{t})\ [V]$ 印加時の応答であり、 $t=0$ において積分値が 1 となるインパルスを入力したときの応答である。インディシャル応答は $\Phi(\mathrm{t})\ [V]$ として、インパルスを積分した単位階段関数印加時の応答である。電気回路の学修に於いては直流電圧印加時の過渡応答に対応するインディシャル応答の方がわかりやすいので、この直流過渡応答は、その微分がインパルス応答となるか、離散的なモデルで確認してみる。

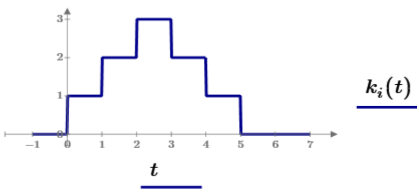
$\Phi(\mathrm{t})$ 入力時の応答 → インディシャル応答 $k_i(\mathrm{t})$ (1.5)

$\Delta(\mathrm{t})$ 入力時の応答 → インパルス応答 $k(\mathrm{t})$ (1.6)

［例題 4.1］ $t=0$ において、直流電源 1[V] 印加時の過渡電流応答が $i(\mathrm{t})=$ 1,2,3,2,1 [A] となる電気回路がある。ここで電流値は 1 秒間隔でサンプリングされた値で、$i(0)=1, i(1)=2, i(2)=3, i(3)=2, i(4)=1, i(5)=0$ と変化したことを意味しているものとする。この回路へ $v(\mathrm{t})=$ 1,2,3,2,1 [V] と変化する印加電圧を与えたときの電流応答を求めよ。

［解］この回路のインディシャル応答を、単位階段関数を用いて表すと下記となる。

$$k_i(t) := 1\cdot\Phi(t)+1\cdot\Phi(t-1)+1\cdot\Phi(t-2)-1\cdot\Phi(t-3)-1\cdot\Phi(t-4)-1\cdot\Phi(t-5)$$

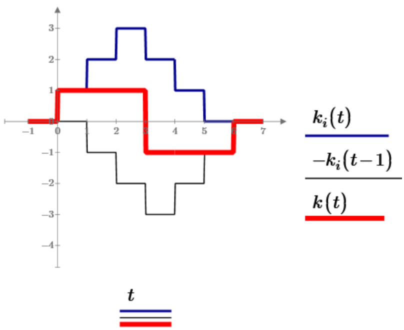


この波形を微分する代わりに、離散系では差分を用いてみる。するとインパルス応答は下記となる。

$$k(t) := k_i(t)-k_i(t-1) \rightarrow -(2\cdot\Phi(t-3))+\Phi(t-6)+\Phi(t)$$

次に入力電圧波形はインディシャル応答と同じ形としたので、そのインディシャ

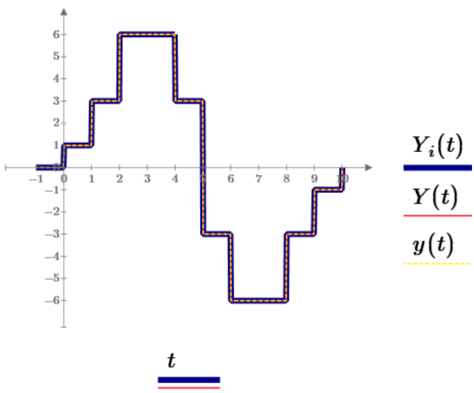
ル応答の重ね合わせと、インパルス応答の重ね合わせを離散系で考えてみる。インディシャル応答では入力電圧の変化のあったごとの、6 つのインディシャル応答の重ね合わせであり、インディシャル応答の差分で考えるインパルス応答では、5 つのインパルス応答の重ね合わせであることに注意が必要である。従って、求める結果は下記のような波形 $y(t)$ となることが分かる。



$$Y_i(t) := 1 \cdot k_i(t) + 1 \cdot k_i(t-1) + 1 \cdot k_i(t-2) - k_i(t-3) - k_i(t-4) - k_i(t-5)$$

$$Y(t) := 1 \cdot k(t) + 2 \cdot k(t-1) + 3 \cdot k(t-2) + 2 \cdot k(t-3) + 1 \cdot k(t-4)$$

$$y(t) := \Phi(t) + 2 \cdot \Phi(t-1) + 3 \cdot \Phi(t-2) - 3 \cdot \Phi(t-4) - 6 \cdot \Phi(t-5) - 3 \cdot \Phi(t-6) + 3 \cdot \Phi(t-8) + 2 \cdot \Phi(t-9) + 1 \cdot \Phi(t-10)$$



確認問題 4.1　この応答波形を離散的な信号のコンボリューション演算で求めて見よ。

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}、\quad h := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}、\quad y := x * h = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}、\quad y := h * x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

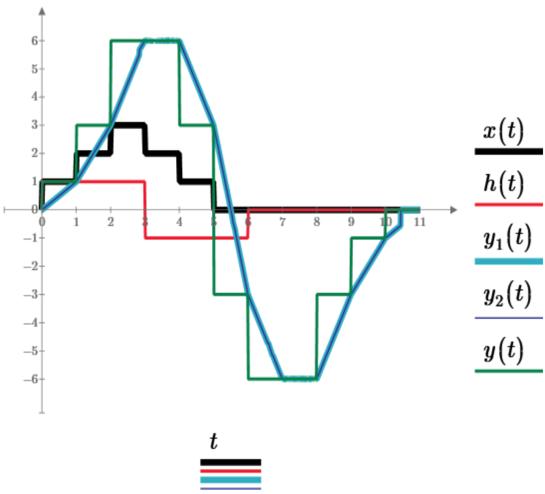
確認問題 4.2　この回路の応答波形をアナログ波形の畳み込み積分で求めて見よ。

入力波形を$x(t)$、インパルス応答である伝達関数を $h(t)$、畳み込み積分で求めた応答波形を $y_1(t)$ および $y_2(t)$、離散系で先に求めた応答を$y(t)$ とすると下記となり、離散系とアナログ系の関係が見て取れる。なお、下記のアナログ系の畳み込み積分結果にはわずかにノイズ的な計算誤差が含まれている。

$$x(t) := 1 \cdot \Phi(t) + 1 \cdot \Phi(t-1) + 1 \cdot \Phi(t-2) - 1 \cdot \Phi(t-3) - 1 \cdot \Phi(t-4) - 1 \cdot \Phi(t-5)$$、

$$h(t) := -(2 \cdot \Phi(t-3)) + \Phi(t-6) + \Phi(t)$$、

$$y_1(t) := \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$、 $$y_2(t) := \int_0^t h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$、

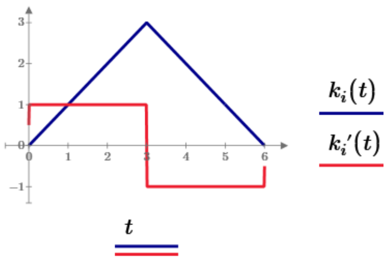


t=3 付近のノイズ
t=10.5以降の傾き1
にエラーがある。

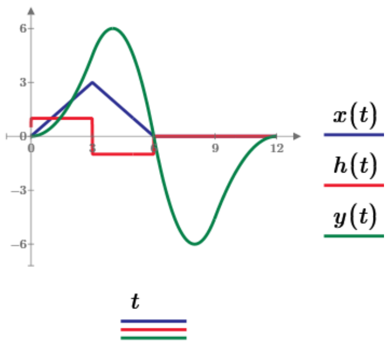
確認問題 4.3　この回路の応答波形を連続系の問題として、インディシャル応答が三角波である回路の、三角波入力時の応答問題として、畳み込み積分で求めて見よ。

入力波形を $x(t)$、インパルス応答である伝達関数を $h(t)$、畳み込み積分で求めた応答波形を $y(t)$ とすると下記となる。

$$k_i(t) := t \cdot (\Phi(t) - \Phi(t-3)) + (6-t) \cdot (\Phi(t-3) - \Phi(t-6))$$



$x(t) := k_i(t)$ 、 $h(t) := \Phi(t) - 2 \cdot \Phi(t-3) + \Phi(t-6)$ 、 $y(t) := \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$



[例題 4.2]　上記のデジタルな離散系とアナログな連続系の違いを確認するため、インパルス応答が正方形単位パルスである回路の単位パルス応答を離散系と連続系でそれぞれ求めて見よ。

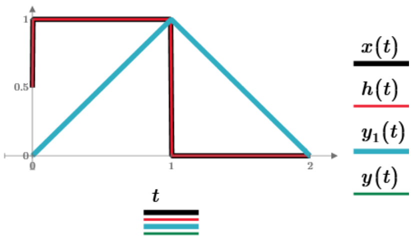
[解] この問題はインディシャル応答が単位階段関数である回路の単位パスル応答を求めている事になるので、単位パルス応答が単位パルスである系の単位パルス応

答は、離散系では面積 1 の単位パルスに、連続系では面積 1 の二等辺三角形の形の三角波になる。

$x := [1]$、$h := [1]$、$y := x * h = [1]$、$y := h * x = [1]$、

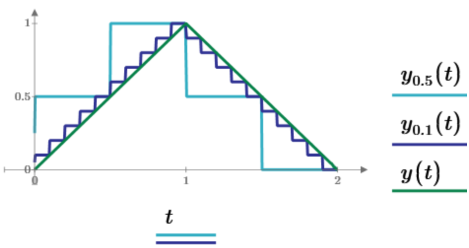
$k_i(t) := \Phi(t)$、$k(t) := k_i(t) - k_i(t-1) \rightarrow -\Phi(t-1) + \Phi(t)$

$x(t) := 1 \cdot \Phi(t) - 1 \cdot \Phi(t-1)$、$h(t) := 1 \cdot \Phi(t) - 1 \cdot \Phi(t-1)$、$y_1(t) := \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$



$x(t)$と$h(t)$と$y(t)$は同じ単位パルス。

確認問題 4.4　上記でサンプリング間隔が 0.5 秒になったときと、0.1 秒になったときのデジタル系の応答を求めることで、サンプリングが連続になったアナログ系の場合は三角波となることを確認せよ。



上記のように、サンプリング間隔が 0.5 秒になると、単位パルスを半分にした応答が、0.5 秒間隔で 2 つ重ね合わさることとなり、0.1 秒間隔にすると 10 分の 1 の応答が、0.1 秒間隔で 10 個重ね合わさることとなる。従って、無限にサンプリング間隔を短くしたアナログ系では三角波が出力されることとなる。

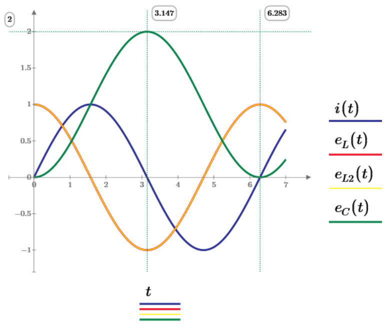
[例題 4.3]　$Z(s) = sL + \frac{1}{sC}$、$L = 1\text{H}$、$C = 1\text{F}$ の LC 直列回路のインディシャル応

答である直流過渡応答は正弦波状の電流波形であった。この事から LC 直列回路のインパルス応答を求めて見よ。

［解］LC 直列回路の直流過渡応答は下記となる。$E=1$、$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}=1$なので$i(t)=\sin(t)$ がインディシャル応答である過渡電流応答である。従って、インパルス応答はインディシャル応答を微分して、$e_{L2}(t)$ と同じ $\cos(t)$ となる。

$$\frac{E\cdot\left(\frac{1}{s}\right)}{s\cdot L+\frac{1}{s\cdot C}}\xrightarrow[invlaplace]{assume,ALL>0}\frac{E\cdot\sin\left(t\cdot\sqrt{\frac{1}{C\cdot L}}\right)}{L\cdot\sqrt{\frac{1}{C\cdot L}}}$$
、
$$\frac{E\cdot\left(\frac{1}{s}\right)}{s\cdot L+\frac{1}{s\cdot C}}\xrightarrow{invlaplace}\sin(t)$$
、

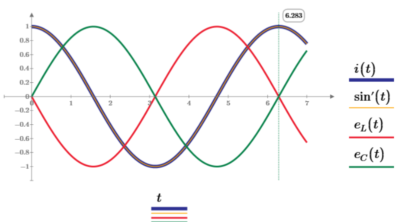
$$e_C(t):=\frac{\int_0^t i(t)\,dt}{C}$$
、
$$e_L(t):=E-e_C(t)$$
、
$$e_{L2}(t):=L\cdot\frac{d}{dt}i(t)$$



確認問題 4.5　LC 直列回路のインパルス応答をラプラス変換で求めて見よ。

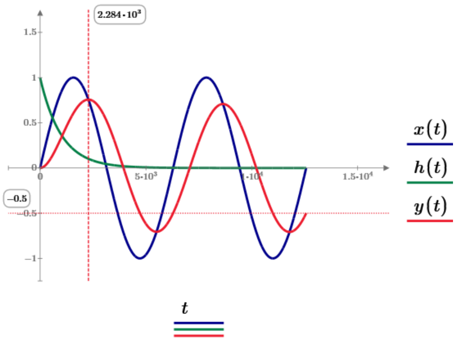
下記のようにインパルス応答はインディシャル応答の微分波形となる。

$$\frac{1}{s\cdot L+\frac{1}{s\cdot C}}\xrightarrow{invlaplace}\cos(t)$$
、
$$e_L(t):=L\cdot\frac{d}{dt}i(t)$$
、
$$e_C(t):=\frac{\int_0^t i(t)\,dt}{C}$$

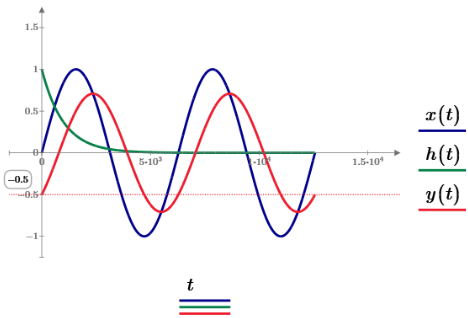


確認問題 4.6　$Z(s) = R + sL$、$R = 1\Omega$、 $L = 1\mathrm{H}$ の RL 直列回路の交流過渡応答を、デジタル系の畳み込み積分で求めて見よ。入力電圧を $x(t) = \sin(t)$、回路の伝達関数を $h(t) = \frac{1}{s+1}$、として、1ms サンプリングのデジタルデータを下記のように作成し、コンボリューション演算を実行して、そのリアルパートを取り出すと、ms 単位の畳み込み積分結果が求まる。これが RL 直列回路の交流過渡応答である。ちなみに循環コンボリューション ⊛を行うと、定常解が求まる。

$\frac{1}{s+1} \xrightarrow{invlaplace} e^{-t}$、 $x_t := \sin\left(\frac{t}{1000}\right)$、 $h_t := 1 \cdot e^{-\frac{t}{1000}}$、 $y := Re(x * h)$



$y := Re\left(\frac{x * h}{1000}\right)$

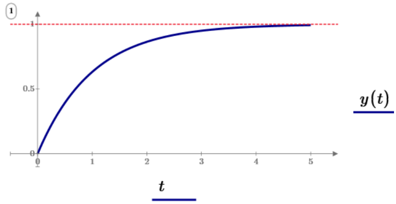


$y := \mathrm{Re}\left(\frac{x \circledast h}{1000}\right)$

確認問題 4.6　$Z(s) = R + sL$、$R = 1\Omega$、 $L = 1\mathrm{H}$ の RL 直列回路の交流過渡応答を、直流過渡応答の重ね合わせで求めて見よ。

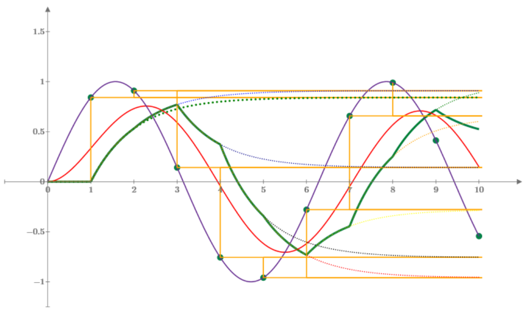
この回路の直流過渡応答は次の通りである。

$$\frac{\frac{1}{s}}{s+1} \xrightarrow{invlaplace} 1-e^{-t}$$



、

この応答波形を、正弦波電圧を 1s ごとにサンプリングした値によりそれぞれのインディシャル応答の和により合成すると、次の緑の波形となる。従って、サンプリング間隔を 1ms にして、全てのインディシャル応答を重ね合わせると、直流過渡応答の畳み込み（重ね合わせ）で、交流過渡応答が求まる。これは過渡現象の解法で求めた $y(t)$ と一致する。



$$Y(t) := \sum_{i=1}^{10000} \left(\left(x_i - x_{i-1} \right) \cdot \left(1 - e^{-\left(t - \frac{i}{1000} \right)} \right) \cdot \Phi\left(t - \frac{i}{1000} \right) \right)$$

$$y(t) := \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2} \quad 、 \quad y_1(t) := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e^{-t}}{2}$$