５．RL・RC 回路の過渡現象

電気回路(LTI システム)の例として、RL および RC 直列回路の過渡現象を考える。前章までで、それらのインパルス電圧応答やインディシャル（直流）電圧応答である電流波形の求め方は明らかとなっている。ここでは電気回路の最初に学ぶ直流電圧印加時の過渡応答から考えてみる。$t=0$ において$\Phi(t)$ [V] を印加した、インディシャル応答の方がわかりやすい。この直流過渡電流応答の微分がインパルス応答となる。

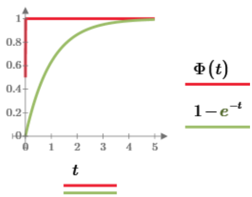
$R=1\Omega,\ L=1\mathrm{H}$ の直列回路の Z(s) $\rightarrow$ $Z_{RL}(s)=R+sL=1+s$ (1.7)

$R=1\Omega,\ C=1\mathrm{F}$ の直列回路の Z(s) $\rightarrow$ $Z_{RC}(s)=R+\frac{1}{sC}=1+\frac{1}{s}$ (1.8)

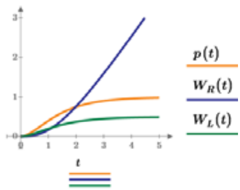
[例題 5.1]　RL および RC 直列回路の $t=0$ において、直流電源 1[V] 印加時の過渡電流応答を求めよ。そのエネルギーについても求めよ。

[解] これらの回路のインディシャル応答は下記となる。

$I_{RL}(s):=\frac{\frac{1}{s}}{s+1}\xrightarrow{invlaplace}1-e^{-t}$ 、



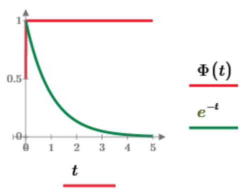
、



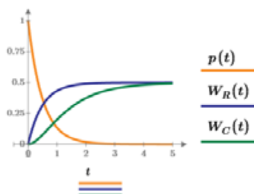
$p(t):=i(t)^2\cdot R\xrightarrow{simplify}\left(e^{-t}-1\right)^2$ 、 $W_R(t):=\int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\xrightarrow{simplify}t+2\cdot e^{-t}-\frac{e^{-2\cdot t}}{2}-\frac{3}{2}$ 、

$W_L(t):=\frac{1}{2}\cdot L\cdot i(t)^2\xrightarrow{simplify}\frac{\left(e^{-t}-1\right)^2}{2}$ 、 $\int_0^{\infty}\left(\frac{E}{R}-i(t)\right)^2\cdot R\,\mathrm{d}t\rightarrow\frac{1}{2}$ 、 $W_L(\infty)\rightarrow\frac{1}{2}$ 。つまり、最終的に L に蓄えられるエネルギーと、R で消費できなかったエネルギーは等しい。

$I_{RC}(s):=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}\xrightarrow{invlaplace}e^{-t}$ 、



、



$p(t):=i(t)^2\cdot R \xrightarrow{simplify} e^{-2\cdot t}$、 $W_R(t):=\int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow{simplify} \frac{1}{2}-\frac{e^{-2\cdot t}}{2}$

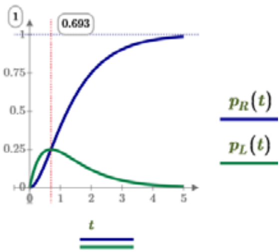
$W_C(t):=\frac{1}{2}\cdot C\cdot v_C(t)^2 \xrightarrow{simplify} \frac{\left(e^{-t}-1\right)^2}{2}$、 $W_C(\infty)\to\frac{1}{2}$、 $W_R(\infty)\to\frac{1}{2}$。つまり、最終的に C に蓄えられるエネルギーと、R で消費されたエネルギーは等しい。また、これらの過渡電流波形を微分すると、RL および RC 直列回路の $t=0$ におけるインパルス応答が求まる事になる。

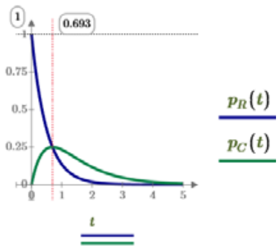
確認問題 5.1　RL および RC 直列回路の過渡応答電流波形が最終値の 1/2 となる時間を、時定数 τ を用いて求めよ。

$$i(t):=\frac{\frac{E}{s}}{(s\cdot L+R)} \xrightarrow{\substack{invlaplace\\ simplify}} -\frac{\left(E\cdot\left(e^{\frac{-(R\cdot t)}{L}}-1\right)\right)}{R}、\quad \frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-t\cdot R}{L}}\right)=\frac{E}{R\cdot 2}\xrightarrow{\substack{solve,t\\ substitute,\frac{L}{R}=\tau}}\tau\cdot\ln(2)$$

$$i(t):=\frac{\frac{E}{s}}{R+\frac{1}{s\cdot C}} \xrightarrow{invlaplace} \frac{E\cdot e^{-\frac{t}{C\cdot R}}}{R}、\quad \frac{E}{R}\left(e^{\frac{-t}{C\cdot R}}\right)=\frac{E}{R\cdot 2}\xrightarrow{\substack{solve,t\\ substitute,C\cdot R=\tau}}\tau\cdot\ln(2)$$

確認問題 5.2　RL および RC 直列回路の過渡応答で L および C の瞬時電力が最大となる時間を求めよ。（下図は E=R=L=C=1 の図である）





$$i(t):=\frac{\frac{E}{s}}{R+s\cdot L}\xrightarrow{invlaplace} -\frac{E\cdot\left(e^{-\frac{R\cdot t}{L}}-1\right)}{R}、\quad v_R(t):=i(t)\cdot R\to -\left(E\cdot\left(e^{-\frac{R\cdot t}{L}}-1\right)\right)$$

$$v_L(t):=L\cdot i'(t)\to E\cdot e^{-\frac{R\cdot t}{L}}、\quad p_R(t):=v_R(t)\cdot i(t)\to\frac{E^2\cdot\left(e^{-\frac{R\cdot t}{L}}-1\right)^2}{R}$$

$$p_L(t):=v_L(t)\cdot i(t)\to -\frac{E^2\cdot e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\cdot\left(e^{-\frac{R\cdot t}{L}}-1\right)}{R}、\quad t_{max}:=p_L'(t)=0\xrightarrow{\substack{assume, ALL>0\\ solve,t}}\frac{L\cdot\ln(2)}{R}$$

$p_L(t_{max}) \rightarrow \dfrac{E^2}{4\cdot R}$ 、 $p_R(t_{max}) \rightarrow \dfrac{E^2}{4\cdot R}$ 。最大電力供給（伝達）定理の電源の固有電力と等しい。

$i(t) := \dfrac{\frac{E}{s}}{R+\frac{1}{s\cdot C}} \xrightarrow{invlaplace} \dfrac{E\cdot e^{-\frac{t}{C\cdot R}}}{R}$ 、 $v_R(t) := i(t)\cdot R \rightarrow E\cdot e^{-\frac{t}{C\cdot R}}$

$v_C(t) := \dfrac{1}{C}\cdot\displaystyle\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \rightarrow -\left(E\cdot\left(e^{-\frac{t}{C\cdot R}}-1\right)\right)$ 、 $p_R(t) := v_R(t)\cdot i(t) \rightarrow \dfrac{E^2\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{C\cdot R}}}{R}$

$p_C(t) := v_C(t)\cdot i(t) \rightarrow -\dfrac{E^2\cdot e^{-\frac{t}{C\cdot R}}\cdot\left(e^{-\frac{t}{C\cdot R}}-1\right)}{R}$ 、 $t_{max} := p_C{}'(t)=0 \xrightarrow[solve,t]{assume,ALL>0} C\cdot R\cdot\ln(2)$

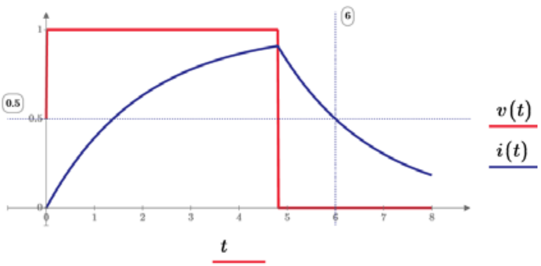
$p_C(t_{max}) \rightarrow \dfrac{E^2}{4\cdot R}$ 、 $p_R(t_{max}) \rightarrow \dfrac{E^2}{4\cdot R}$ 。やはり最大電力供給（伝達）定理の電源の固有電力と等しい。

確認問題 5.3　RL 直列回路の過渡電流波形および RC 直列回路の C の分担電圧が、時定数 τ の 3 倍の時間で最終値の 1/2 となる方形パルス電圧の幅 T_W を求めよ。（下図は E=R=C=1, L=2 の図である）

$V(s) := (\Phi(t)-\Phi(t-T_w))\cdot E \xrightarrow[laplace]{assume,T_w>0} -\dfrac{E\cdot\left(e^{-(T_w\cdot s)}-1\right)}{s}$

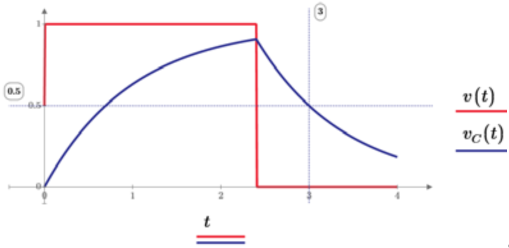
$i(t) := \dfrac{V(s)}{R+s\cdot L} \xrightarrow[invlaplace]{assume,ALL>0} \Phi(t-T_w)\cdot\left(e^{\frac{T_w}{2}-\frac{t}{2}}-1\right)-e^{-\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)}+1$

$T_w := i(3\cdot\tau) = \dfrac{E}{2\cdot R} \xrightarrow[solve,T_w]{assume,T_w>0} 2\cdot\ln\left(e^{-3}+\dfrac{1}{2}\right)+6$



$$v_C(t) := \frac{\frac{V(s)}{s\cdot C}}{R+\frac{1}{s\cdot C}} \xrightarrow[\text{invlaplace}]{\text{assume}, ALL>0} E - E\cdot\Phi(t-T_w) - E\cdot e^{-\frac{t}{C\cdot R}} + E\cdot e^{\frac{T_w - t}{C\cdot R}}\cdot\Phi(t-T_w)$$

$$T_w := v_C(3\cdot\tau) = \frac{E}{2} \xrightarrow[\text{solve}, T_w]{\text{assume}, T_w>0} \ln\left(e^{-3}+\frac{1}{2}\right)+3 = 2.402$$

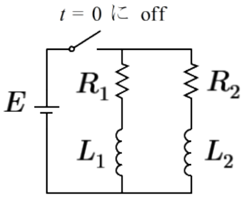


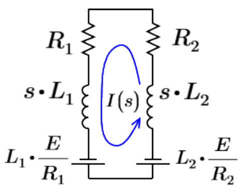
。一般に、

$$T_w := v_C(n\cdot\tau) = \frac{E}{m} \xrightarrow[\text{solve}, T_w]{\text{assume}, ALL>0} C\cdot R\cdot\left(n+\ln\left(m\cdot e^{-n}+1\right)-\ln(m)\right)$$

、$T_w = \tau\cdot\left(\ln\left(e^{-n}+\frac{1}{m}\right)+n\right)$

［例題 5.2］　図のような 2 組の RL 直列回路が電源 E に並列に接続されており、定常状態になっていたとする。$t=0$ に電源を外したときの過渡電流を求め、回路の時定数とエネルギーについて考察せよ。





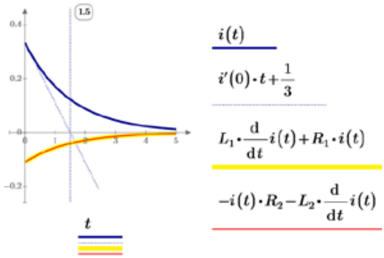
［解］この問題は 2 つの L の磁束保存則の理解を問う問題である。まず過渡電流は簡単に求めることができ、時定数の式から 4 素子の直列回路の過渡現象である事が分かる。従って過渡応答期間に回路で消費されるエネルギーも簡単に求めることができる。このエネルギーは過渡応答開始時に回路のインダクタンスが有していたはずなので、過渡電流の初期値が求まる。ところで電源除去前には 2 つの L が有していたエネルギーの合計は下記となり、先の消費エネルギーとは異なる。従って下記の様に、2 つの L の磁束が相殺し合う場合には、磁束保存則の考え方（質量系にお

ける運動量保存則）を意識する必要がある。（下図は$E = R_1 = R_2 = L_2 = 1, L_1 = 2$ の図である。下記が両辺とも 1 となることにより、$I(0) = \frac{1}{3}$ であることが分かる。）

$$L_1 \cdot \frac{E}{R_1} - L_2 \cdot \frac{E}{R_2} = (L_1 + L_2) \cdot I(0) \qquad i(t) := \frac{L_1 \cdot \frac{E}{R_1} - L_2 \cdot \frac{E}{R_2}}{R_1 + R_2 + s \cdot L_1 + s \cdot L_2} \xrightarrow{invlaplace} \frac{(L_1 \cdot R_2 - L_2 \cdot R_1) \cdot e^{\frac{(-R_2 - R_1) \cdot t}{L_2 + L_1}}}{(L_2 + L_1) \cdot R_1 \cdot R_2}$$

、

$$i(t) := \frac{(L_1 \cdot R_2 - L_2 \cdot R_1) \cdot e^{\frac{(-R_2 - R_1) \cdot t}{L_2 + L_1}}}{(L_2 + L_1) \cdot R_1 \cdot R_2} \rightarrow \frac{e^{\frac{-(2 \cdot t)}{3}}}{3} \quad 、 \quad \tau := \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2} \rightarrow \frac{3}{2} \quad 、 \quad i(0) \rightarrow \frac{1}{3}$$



$$W_L := \frac{1}{2} \cdot (L_1 + L_2) \cdot i(0)^2 \rightarrow \frac{1}{6}$$

、

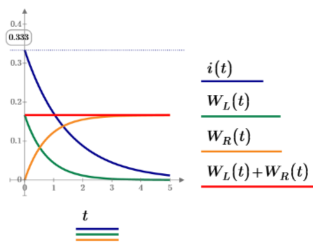
$$\int_0^{\infty} i(\tau)^2 \cdot (R_1 + R_2) \, d\tau \rightarrow \frac{1}{6}$$

確認問題 5.4　上記で $W_L(t)$と$W_R(t)$の和を求めてグラフで表せ。ただし、$W_R(t)$は、過渡現象が時刻 t まで進んだときの、過渡現象期間に回路の合成抵抗で消費されたエネルギーとする。過渡現象期間の任意の時間でエネルギー保存則が成り立っている事が確認できる。

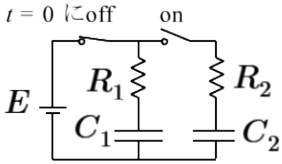
$$W_L(t) := \frac{1}{2} \cdot (L_1 + L_2) \cdot i(t)^2 \rightarrow \frac{\left(e^{\frac{-(2 \cdot t)}{3}}\right)^2}{6}$$

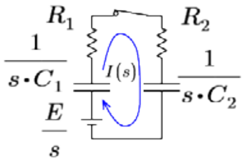
$$W_R(t) := \int_0^t i(\tau)^2 \cdot (R_1 + R_2) \, d\tau \rightarrow \frac{-e^{\frac{-(4 \cdot t)}{3}} + 1}{6}$$

$$W_L(t) + W_R(t) \xrightarrow{simplify} \frac{1}{6}$$



[例題 5. 3]　図のような 2 組の RC 直列回路のうち片方のみが電源 E に接続されており、定常状態になっていたとする。$t = 0$ に電源を外し、もう一組の RC 直列回路に接続したときの過渡電流を求め、回路の時定数とエネルギーについて考察せよ。





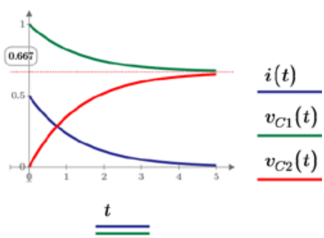
、

［解］この問題は 2 つの C の電荷保存則の理解を問う問題である。まず過渡電流は簡単に求めることができ、時定数の式からこの場合も 4 素子の直列回路の過渡現象である事が分かる。過渡応答期間に回路で消費されるエネルギーも今までと同様に簡単に求めることができる。このエネルギーは過渡応答開始時に回路の C_1 が有していたエネルギーと、過渡現象終了後に回路の C_1 と C_2 が有しているエネルギーの差となる。そこで過渡現象期間に移動する電荷量を求めてみる。この値は、過渡現象終了後に C_1 と C_2 の電位が等しいことからも簡単に求めることができる。ところで過渡電流終了後のコンデンサのエネルギーの式からも分かるように、合成容量は C_1+C_2 であり、コンデンサの並列回路である。先の過渡現象期間は合成容量が直列回路のものであったのと異なることに注意が必要である。（下図は$E=R_1=R_2=C_2=1, C_1=2$ の図である。）

$$C_1 \cdot E = (C_1+C_2)\cdot E\infty \xrightarrow{solve, E\infty} \frac{C_1 \cdot E}{C_1+C_2}$$
、
$$i(t) := \frac{\frac{E}{s}}{R_1+\frac{1}{s\cdot C_1}+R_2+\frac{1}{s\cdot C_2}} \xrightarrow[\substack{invlaplace\\ simplify}]{assume, ALL>0} \frac{E\cdot e^{-\frac{t\cdot(C_1+C_2)}{C_1\cdot R_1\cdot C_2+C_1\cdot C_2\cdot R_2}}}{R_1+R_2}$$

$$\tau := \frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2}\cdot(R_1+R_2)$$
、
$$q_1(t) := C_1\cdot E - \int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t \rightarrow C_1\cdot E + \frac{C_1\cdot C_2\cdot E\cdot\left(e^{-\frac{C_1\cdot t+C_2\cdot t}{C_1\cdot R_1\cdot C_2+C_1\cdot C_2\cdot R_2}}-1\right)}{C_1+C_2}$$

$$q_2(t) := \int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t \rightarrow -\frac{C_1\cdot C_2\cdot E\cdot\left(e^{-\frac{C_1\cdot t+C_2\cdot t}{C_1\cdot R_1\cdot C_2+C_1\cdot C_2\cdot R_2}}-1\right)}{C_1+C_2}$$
、
$$v_{C1}(t) := \frac{q_1(t)}{C_1}$$
、
$$v_{C2}(t) := \frac{q_2(t)}{C_2}$$



$$W_{C1} := \frac{1}{2}\cdot C_1\cdot E^2 \rightarrow 1$$

$$W_{C12} := \frac{1}{2}\cdot(C_1+C_2)\cdot\left(\frac{C_1\cdot E}{C_1+C_2}\right)^2 \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$W_{C1}-W_{C12} \rightarrow \frac{1}{3}$$
、

$$v_{C1}(\infty) \rightarrow \frac{2}{3} 、 \quad W_{C1}(t) := \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot v_{C1}(t)^2 \rightarrow \left(\frac{e^{-\frac{3 \cdot t}{4}}}{3} + \frac{2}{3} \right)^2$$

$$v_{C2}(\infty) \rightarrow \frac{2}{3} 、 \quad W_{C2}(t) := \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot v_{C2}(t)^2 \rightarrow \frac{\left(\frac{2 \cdot e^{-\frac{3 \cdot t}{4}}}{3} - \frac{2}{3} \right)^2}{2}$$

$$W_R(t) := \int_0^t i(\tau)^2 \cdot (R_1 + R_2)\, \mathrm{d}\tau \rightarrow \frac{1}{3} - \frac{e^{-\frac{3 \cdot t}{2}}}{3}$$

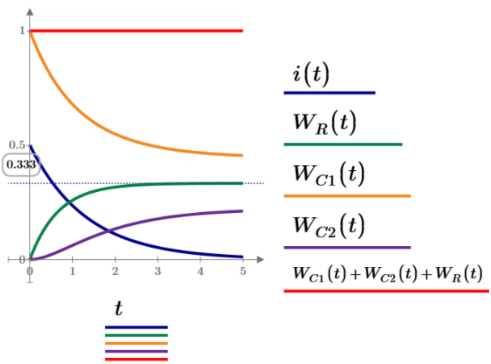
確認問題 5.5　上記で $W_{C1}(t)$ と $W_{C2}(t)$ と $W_R(t)$の和を求めてグラフで表せ。ただし、$W_R(t)$は、過渡現象が時刻 t まで進んだときの、過渡現象期間に回路の合成抵抗で消費されたエネルギーとする。過渡現象期間の任意の時間でエネルギー保存則が成り立っている事が確認できる。

$$W_{C1} := \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot E^2 \rightarrow 1$$

$$W_{C1}(\infty) \rightarrow \frac{4}{9}$$

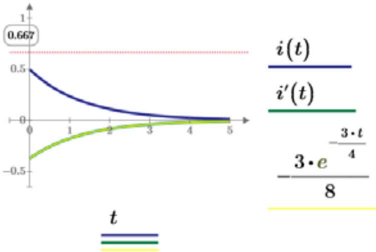
$$W_{C2}(\infty) \rightarrow \frac{2}{9}$$

$$W_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{3}$$



確認問題 5.6　上記 RC4 素子回路の $i(t)$ はインディシャル応答である。インパルス応答をラプラス変換と電流応答の微分から求め、両者が等しいことを確認せよ。

$$i_i(t) := \frac{E}{R_1 + \frac{1}{s \cdot C_1} + R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}} \xrightarrow[\textit{simplify}]{\textit{assume}, ALL > 0 \;\; \textit{invlaplace}} \frac{\Delta(t)}{2} - \frac{3 \cdot e^{-\frac{3 \cdot t}{4}}}{8}$$



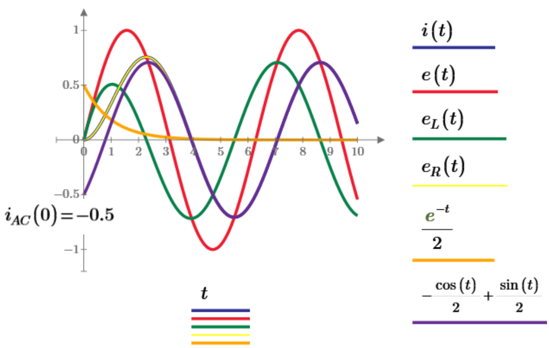
$t=0$ のインパルスをグラフでは表現できていないことに注意が必要である。この積分値により、電流は 0.5A から減衰することとなる。

[例題 5.4] RL および RC 直列回路の $t=0$ において、交流正弦波電源（波高値 1[V]）を 印加したときの過渡電流応答を求めよ。その過渡電流項によるエネルギーについても求めよ。

[解] これらの回路の交流応答は下記となる。（下図は$E=R=L=C=\omega=1$ の図である。）

$$\sin(\omega\cdot t)\xrightarrow{laplace}\frac{\omega}{\omega^2+s^2}\text{、}\quad i(t):=\frac{\frac{\omega}{\omega^2+s^2}}{(s\cdot L+R)}\xrightarrow[invlaplace]{assume,ALL>0}\frac{R\cdot\sin(\omega\cdot t)+\omega\cdot L\cdot e^{-\frac{R\cdot t}{L}}-\omega\cdot L\cdot\cos(\omega\cdot t)}{\omega^2\cdot L^2+R^2}$$

$$i(t):=\frac{\frac{\omega}{\omega^2+s^2}}{(s\cdot L+R)}\xrightarrow{invlaplace}\frac{e^{-t}}{2}-\frac{\cos(t)}{2}+\frac{\sin(t)}{2}\text{、}\quad W_R(t):=\int_0^t\left(\frac{e^{-t}}{2}\right)^2\cdot R\,\mathrm{d}t\to\frac{1}{8}-\frac{e^{-2\cdot t}}{8}\text{、}\quad W_L:=\frac{1}{2}\cdot L\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\to\frac{1}{8}$$



$$\sqrt{R^2+(\omega\cdot L)^2}\to\sqrt{2}$$

$$Z:=\sqrt{2}\angle 45\ deg$$

$$W_R(t):=\int_0^t\left(\frac{e^{-t}}{2}\right)^2\cdot R\,\mathrm{d}t\to\frac{1}{8}-\frac{e^{-2\cdot t}}{8}$$

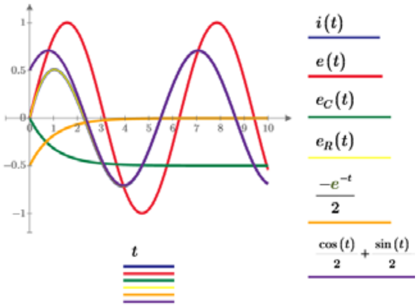
$$i_{AC}(t):=\frac{E}{|Z|}\cdot\sin(\omega\cdot t-\arg(Z))\qquad W_L:=\frac{1}{2}\cdot L\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\to\frac{1}{8}\qquad W_R(\infty)\to\frac{1}{8}$$

RL 回路では L があることにより、最初の電流は 0 であるが、交流定常解の初期値は、-0.5A である。従って、過渡項の大きさは 0.5A の指数減衰電流で、その時定数は 1s である。この過渡項電流初期値による L のエネルギーは $\frac{1}{8}$ であり、R で過渡現象期間に消費されるエネルギーと等しい事が分かる。

$$i(t):=\frac{\frac{\omega}{\omega^2+s^2}}{\left(\frac{1}{s\cdot C}+R\right)}\xrightarrow[invlaplace]{assume,ALL>0}\frac{\omega\cdot C\cdot\left(\cos(\omega\cdot t)-e^{-\left(\frac{\frac{1}{C}}{R}\cdot t\right)}+\omega\cdot C\cdot R\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)}{\omega^2\cdot C^2\cdot R^2+1}$$
、
$$Z:=\sqrt{2}\angle -45\ deg$$

$$i(t):=\frac{\frac{\omega}{\omega^2+s^2}}{\left(\frac{1}{s\cdot C}+R\right)}\xrightarrow{invlaplace}\frac{\cos(t)}{2}-\frac{e^{-t}}{2}+\frac{\sin(t)}{2}$$
、
$$W_R(t):=\int_0^t\left(\frac{-e^{-t}}{2}\right)^2\cdot R\,dt\rightarrow\frac{1}{8}-\frac{e^{-2\cdot t}}{8}$$
、
$$W_C:=\frac{1}{2}\cdot C\cdot\left(e_C(\infty)\right)^2\rightarrow\frac{1}{8}$$

$$i_{AC}(0)=0.5$$



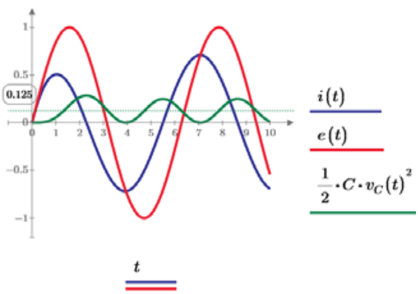
$$i_{AC}(t):=\frac{E}{|Z|}\cdot\sin(\omega\cdot t-\arg(Z))$$

$$W_C:=\frac{1}{2}\cdot C\cdot\left(e_C(\infty)\right)^2\rightarrow\frac{1}{8}$$

$$W_R(\infty)\rightarrow\frac{1}{8}$$

$$e_C(t):=\frac{1}{C}\cdot\int_0^t\frac{-e^{-t}}{2}\,dt$$
、

RC 回路では C があることにより、最初の電流は $\frac{e(0)}{R}=0$であるが、交流定常解の初期値は、0.5A である。従って、過渡項の大きさは-0.5A の指数減衰電流で、その時定数は 1s である。この過渡項電流積分値による C のエネルギーは $\frac{1}{8}$ であり、R で過渡現象期間に消費されるエネルギーと等しい事が分かる。しかしながら実際には交流電圧の重畳により充放電が繰り返されるので、次のようにコンデンサのエネルギーは $\frac{1}{8}$ を中心に振動している。



$$v_C(t):=\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(t)\,dt$$