

6. LC・RLC 回路の過渡現象

電気回路(LTI システム)の例として、LC および RLC 直列回路の過渡現象を考える。前章までで、それらのインパルス電圧応答やインディシャル(直流)電圧応答である電流波形の求めを学んだ。ここでは電気回路の最初に学ぶ直流電圧印加時の過渡応答から考えてみる。 $t = 0$ において $\Phi(t)$ [V] を印加した、インディシャル応答の方がわかりやすい。この直流過渡電流応答の微分がインパルス応答となる。

$$L = 1\text{H}, C = 1\text{F} \text{ の直列回路の } Z(s) \rightarrow Z_{LC}(s) = sL + \frac{1}{sC} = s + \frac{1}{s} \quad (1.9)$$

$$R = 3\Omega, L = 1\text{H}, C = 0.5\text{F} \text{ の直列回路の } Z(s) \rightarrow Z_{RLC}(s) = R + sL + \frac{1}{sC} = s + 3 + \frac{2}{s} \quad (1.10)$$

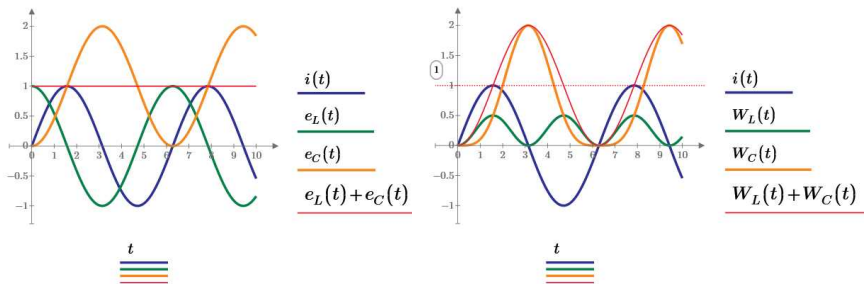
[例題 6.1] LC 直列回路の $t = 0$ において、直流電圧 1[V] 印加時の過渡電流応答を求めよ。そのエネルギーについても求めよ。

[解] この回路のインディシャル応答は下記となる。

$$i(t) := \frac{E}{s \left(s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C} \right)} \xrightarrow[\text{invlaplace}]{\text{assume, ALL > 0}} \xrightarrow[\text{substitute, } \frac{1}{\sqrt{C} \cdot \sqrt{L}} = \omega]{\sqrt{C} \cdot E \cdot \sin(\omega \cdot t)} \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(\omega \cdot t) \rightarrow \sin(t) \quad e(t) := \Phi(t)$$

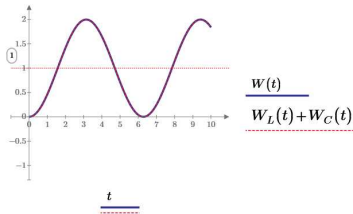
$$e_L(t) := L \cdot i'(t) \quad e_C(t) := \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$W_L(t) := \frac{1}{2} \cdot L \cdot (i(t))^2 \rightarrow \frac{\sin^2(t)}{2} \quad W_C(t) := \frac{1}{2} \cdot C \cdot e_C(t)^2 \rightarrow \frac{(\cos(t) - 1)^2}{2}$$



回路の有する全エネルギーは振動していることが分かる。

確認問題 6.1 LC 直列回路の回路に蓄えられたエネルギーと、電源の供給したエネルギーの関係をグラフ化せよ。



$$W(t) := \int_0^t \Phi(\tau) \cdot i(\tau) d\tau \rightarrow 1 - \cos(t)$$

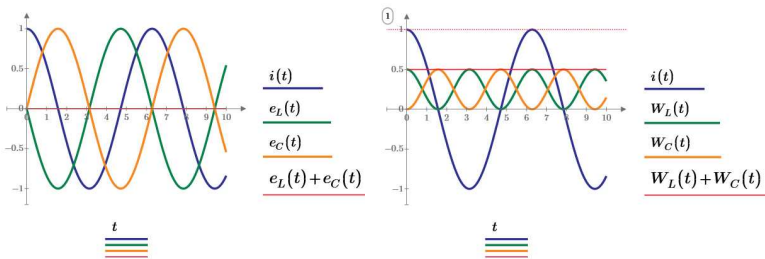
当然両者は等しくなり、電源から供給しては戻る、振動波形と成る。

確認問題 6.2 LC 直列回路のインパルス応答を求めよ。(下図は L=C=1 の図)

assume, ALL > 0
 invlaplace
 substitute, $\frac{1}{\sqrt{C} \cdot \sqrt{L}} = \omega$

$$i(t) = \frac{1}{\left(s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}\right)} \rightarrow \cos(t)$$

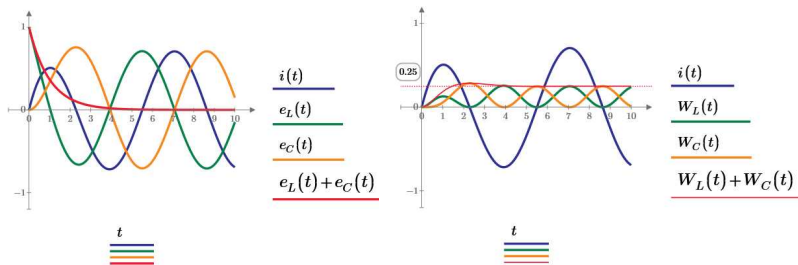
インディシャル応答の正弦波電流を微分した、余弦波電流応答となる。一方、回路のエネルギーは $\frac{1}{2}$ [J] 一定値であることが確認できる。また、インパルスのエネルギーは最初 L に蓄えられている事が見て取れる。



確認問題 6.3 LC 直列回路の指数関数応答を求めよ。(下図は E=L=C=1 の図)

assume, ALL > 0
 invlaplace
 substitute, $\frac{1}{\sqrt{C} \cdot \sqrt{L}} = \omega$

$$i(t) = \frac{1}{\left(s + 1\right)} \rightarrow \frac{\cos(t)}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t)}{2}$$



指数関数電圧による LC 回路の過渡応答電流は、正弦波のように 0 から始まり、印加電圧は最初全て L による電圧降下となり、次第にインパルス応答の時のように、L と C の電圧降下の和は 0 となる。エネルギーについては 0 から始まり、次第にインパルス応答の時のように、一定値となるが、その値は $\frac{1}{4}$ [J] に収束することが確認できる。

[例題 6.2] RLC 直列回路の $t = 0$ において、直流電圧 1[V] 印加時の過渡電流応答を求めよ。また、そのエネルギーについても求めよ。

[解] この回路のインディシヤル応答は下記となる。

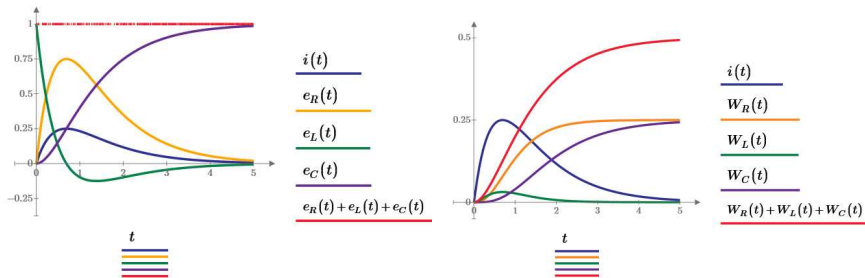
$$i(t) := \frac{\frac{E}{s}}{\left(R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}\right)} \xrightarrow[\text{invlaplace}]{\text{assume, } ALL > 0} \frac{2 \cdot \sqrt{C} \cdot E \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{2 \cdot L}} \cdot \sinh\left(\frac{t \cdot \sqrt{C \cdot R^2 - 4 \cdot L}}{2 \cdot \sqrt{C} \cdot L}\right)}{\sqrt{C \cdot R^2 - 4 \cdot L}}$$

$$i(t) := \frac{2 \cdot \sqrt{C} \cdot E \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{2 \cdot L}} \cdot \sinh\left(\frac{t \cdot \sqrt{C \cdot R^2 - 4 \cdot L}}{2 \cdot \sqrt{C} \cdot L}\right)}{\sqrt{C \cdot R^2 - 4 \cdot L}} \xrightarrow[\text{expand}]{\text{rewrite, exp simplify}} e^{-t} - e^{-(2 \cdot t)}$$

$$e_R(t) := R \cdot i(t) \quad , \quad e_L(t) := L \cdot i'(t) \quad , \quad e_C(t) := \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) \, d\tau$$

$$W_R(t) := \int_0^t (i(\tau))^2 \cdot R \, d\tau \rightarrow 2 \cdot e^{-3 \cdot t} - \frac{3 \cdot e^{-2 \cdot t}}{2} - \frac{3 \cdot e^{-4 \cdot t}}{4} + \frac{1}{4} \quad , \quad W_L(t) := \frac{1}{2} \cdot L \cdot (i(t))^2 \rightarrow \frac{(e^{-t} - e^{-(2 \cdot t)})^2}{2}$$

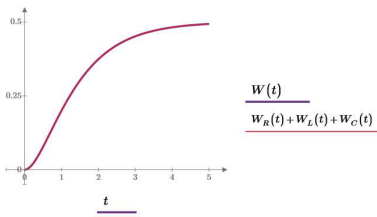
$$W_C(t) := \frac{1}{2} \cdot C \cdot e_C(t)^2 \rightarrow \frac{(e^{-2 \cdot t} - 2 \cdot e^{-t} + 1)^2}{4}$$



最終的に C に蓄えられるエネルギーと、過渡応答期間に R で消費されたエネルギーは RLC 回路でも等しい事が分かる。

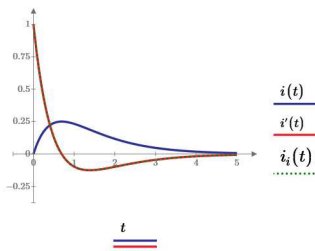
確認問題 6.4 RLC 直列回路の回路に蓄えられたか消費されたエネルギーと、電源の供給したエネルギーの関係をグラフ化せよ。

$$p(t) := \Phi(t) \cdot i(t), \quad W(t) := \int_0^t p(\tau) d\tau \rightarrow \frac{e^{-2 \cdot t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}, \quad W(\infty) \rightarrow \frac{1}{2}$$



この場合も当然、両者は等しくなる。

確認問題 6.5 RLC 直列回路のインパルス応答を求めよ。(下図は L=1, R=3, C=0.5 の図) これはインディシヤル応答の微分波形である。



$$i_i(t) := \frac{1}{\left(R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}\right)} \xrightarrow[\text{invlaplace}]{\text{assume, ALL} > 0} 2 \cdot e^{-2 \cdot t} - e^{-t}$$

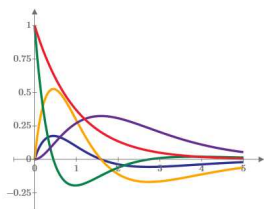
$$i'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve, } t} \ln(2)$$

$$i_i'(t) = 0 \xrightarrow[\text{float, 4}]{\text{solve, } t} 1.386$$

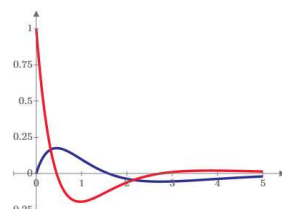
確認問題 6.6 RLC 直列回路の指数関数応答を求めよ。

$$i(t) = \frac{1}{\left(R+s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}\right)} \xrightarrow[\text{invlaplace}]{\text{assume, } ALL > 0} -(e^{-t} \cdot (t+2 \cdot e^{-t}-2)) \quad e_R(t) := R \cdot i(t) \rightarrow -3 \cdot e^{-t} \cdot (t+2 \cdot e^{-t}-2)$$

$$e_L(t) := L \cdot i'(t) \rightarrow e^{-t} \cdot (2 \cdot e^{-t}-1) + e^{-t} \cdot (t+2 \cdot e^{-t}-2) \quad e_C(t) := \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau \rightarrow 2 \cdot e^{-2 \cdot t} - 2 \cdot e^{-t} + 2 \cdot t \cdot e^{-t}$$



$$\begin{aligned} & \underline{i(t)} \\ & \underline{e_R(t)} \\ & \underline{e_L(t)} \\ & \underline{e_C(t)} \\ & \underline{e_R(t) + e_L(t) + e_C(t)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \underline{i(t)} \\ & \underline{i'(t)} \end{aligned}$$

$$\text{root}(i'(t), t, 0, 1) = 0.449 \quad \text{root}(i(t), t, 1, 2) = 1.599 \quad \text{root}(i'(t), t, 1, 4) = 2.833$$

$$W_R(t) := \int_0^t (i(\tau))^2 \cdot R d\tau \rightarrow 2 \cdot e^{-3 \cdot t} - \frac{3 \cdot e^{-2 \cdot t}}{2} - \frac{3 \cdot e^{-4 \cdot t}}{4} + \frac{1}{4} \quad W_R(100) = 0.083 \quad e_L(0) = 1 \quad \int_0^{100} i(\tau) d\tau = 0$$

インディシャル応答が指数関数の差である RLC 直列回路に指数関数電圧を印加すると、最初全電圧は L に加わり、最後に C の電荷量は 0 になる。電流と電流の微分値の根は上記のように求まる。

[例題 6.3] RLC 直列回路の $t = 0$ において、直流電圧 1[V] 印加時の過渡電流応答について、RLC のいずれか 1 素子のみを変化させた場合の、電流応答の変化を可視化せよ。なお、それぞれについて臨界振動状態の時を可視化すること。

[解] この回路のインディシャル応答は下記となる。

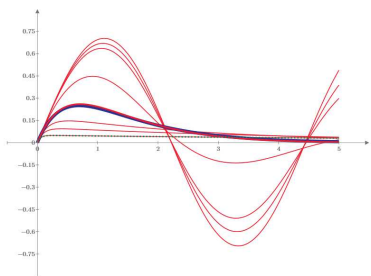
$R = 3\Omega, L = 1H, C = 0.5F$ の直列回路の応答を基準とし **紺色太線** で示す。また、臨界振動状態を **赤の太線** で示す。その他、下記値でグラフ化している。

$$i(r, L, C, t) := \frac{E \cdot e^{\frac{-(r \cdot t)}{2 \cdot L}} \cdot \sinh\left(t \cdot \sqrt{\frac{C \cdot r^2 - 4 \cdot L}{4 \cdot C \cdot L^2}}\right)}{L \cdot \sqrt{\frac{C \cdot r^2 - 4 \cdot L}{4 \cdot C \cdot L^2}}}$$

$$All_R := \text{stack}(i_R(0.01), i_R(0.1), i_R(0.2), i_R(1), i_R(3), i_R(6), i_R(10), i_R(20))$$

$$All_L := \text{stack}(i_L(0.1), i_L(0.2), i_L(0.5), i_L(1), i_L(2), i_L(5), i_L(10))$$

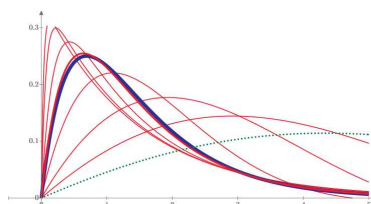
$$All_C := \text{stack}(i_C(0.01), i_C(0.05), i_C(0.1), i_C(0.2), i_C(0.5), i_C(1), i_C(2), i_C(5), i_C(10))$$



$$\frac{AU_R^{(1)}}{i_R(3)^{(0)}} \\ \frac{i_R(2 \cdot \sqrt{2})^{(0)}}{i_R(20)^{(0)}}$$

$$i_R(r) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } t \in 0, 0.01 \dots 5 \\ R^{\text{rows}(R)} \leftarrow \left[t \ i \left(r, 1, \frac{1}{2}, t \right) \right] \\ \text{stack}(R, [\text{NaN NaN}]) \end{array} \right\|$$

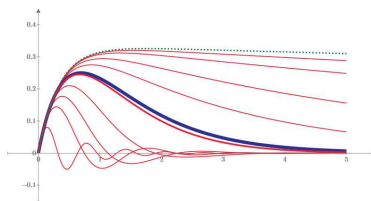
R が小さいと LC と同じ振動になる



$$\frac{AU_L^{(1)}}{i_L(1)^{(0)}} \\ \frac{i_L\left(\frac{8}{9}\right)^{(0)}}{i_L(20)^{(0)}}$$

$$i_L(L) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } t \in 0, 0.01 \dots 5 \\ R^{\text{rows}(R)} \leftarrow \left[t \ i \left(3, L, \frac{1}{2}, t \right) \right] \\ \text{stack}(R, [\text{NaN NaN}]) \end{array} \right\|$$

L が小さいと CR の応答になる。



$$\frac{AU_C^{(1)}}{i_C\left(\frac{1}{2}\right)^{(0)}} \\ \frac{i_C\left(\frac{4.001}{9}\right)^{(0)}}{i_C(20)^{(0)}}$$

$$i_C(C) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } t \in 0, 0.01 \dots 5 \\ R^{\text{rows}(R)} \leftarrow \left[t \ i \left(3, 1, C, t \right) \right] \\ \text{stack}(R, [\text{NaN NaN}]) \end{array} \right\|$$

C が大きいと RL の応答になる。

パラメータの影響を見たい場合には、その変数を引数とする関数を作成し、stack関数で、パラメータの値を指定していき、まとめてグラフ化すれば良い。最後に、[NaN NaN]とあるのは、各グラフの始点と終点を結ばないための空データであ

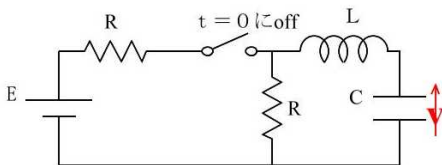
る。Cのみ臨界振動条件でゼロで割ることをさけるため4.001/9としている。

[例題 6.4] 下記の RLC 回路の $t = 0$

においてスイッチを開いたときの RLC

過渡現象電圧源問題を $v_C(t)$ につい

て解け。次に $L = 2CR^2/9$ として解け。



[解] この問題はコンデンサの充電が完了した後の、RLC 放電問題である。 $t = 0$ までのコンデンサは 2 つの抵抗 R による分圧 $E/2$ に充電が完了している。また、L に電流は流れていない。従って、 $E/2$ の RLC 放電問題である。

右図の様に、C の左側の部分の電圧降下を

求めれば正しい答えとなるが、回路電流 $I(s)$

と $1/sC$ の積では正しい答えとならないこと

に注意が必要である。右図の右側の長い赤矢

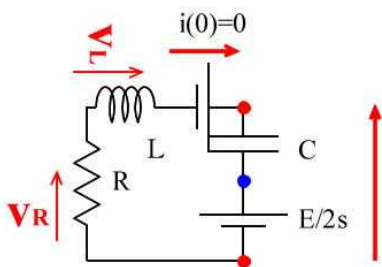
印が求める電圧の過渡現象であり、これは、

$E/2$ から上記 C の電圧降下を引いたものであ

る。言い換えれば、赤丸点●から左の R と L の

電圧降下の和が、求める C の過渡電圧変化と

なる。 $L = 2CR^2/9$ として解くと下記となる。(グラフは $E = R = C = 1$ の時)



$$V(s) = I(s)(R + sL) = \frac{E}{2s} \cdot \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} \cdot (R + sL) [V]$$

$$V(s) = \frac{E}{2 \cdot s} \cdot \left(\frac{1}{s \cdot C} \right) \xrightarrow{\text{simplify}} V(s) = \frac{E}{2 \cdot (C \cdot L \cdot s^3 + C \cdot R \cdot s^2 + s)}$$

... 回路電流 $I(s)$ と $1/sC$ の積

$$v(t) = \frac{E}{2 \cdot (C \cdot 2 \cdot C \cdot \frac{R^2}{9} \cdot s^3 + C \cdot R \cdot s^2 + s)} \xrightarrow{\text{invlaplace}} E \cdot \left(\frac{e^{-\frac{3 \cdot t}{2 \cdot C \cdot R}} - 1}{2} \right)^2$$

... C のみの電圧降下で正しくない

$$v(t) = \frac{E}{2} - \frac{E \cdot \left(e^{-\frac{3 \cdot t}{2 \cdot C \cdot R}} - 1 \right)^2}{2} \xrightarrow{\text{simplify}} - \frac{E \cdot e^{-\frac{3 \cdot t}{2 \cdot C \cdot R}} \cdot \left(e^{-\frac{3 \cdot t}{2 \cdot C \cdot R}} - 2 \right)}{2}$$

... 正しい答え

substitute, $L = 2 \cdot C \cdot \frac{R^2}{9}$

assume, ALL > 0

invlaplace

rewrite, exp

expand

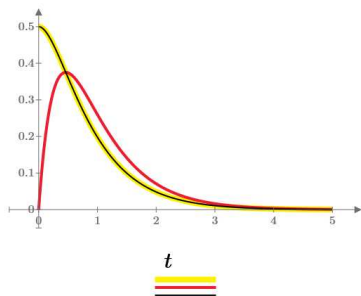
$$v(t) = \frac{E}{2 \cdot s} - \frac{E}{R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} \cdot \left(\frac{1}{s \cdot C} \right) \xrightarrow{\text{simplify}} E \cdot e^{-\frac{3 \cdot t}{2 \cdot C \cdot R}} \cdot \left(e^{-\frac{3 \cdot t}{2 \cdot C \cdot R}} - 2 \right)$$

... 正しい答え

substitute, $L = 2 \cdot C \cdot \frac{R^2}{9}$
assume, $ALL > 0$
invlaplace
rewrite, exp
expand
simplify

$$v(t) := \frac{\frac{E}{2 \cdot s}}{R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} \cdot (R + s \cdot L) \rightarrow \frac{E \cdot e^{-\frac{3 \cdot t}{2 \cdot C \cdot R}} \cdot \left(e^{-\frac{3 \cdot t}{2 \cdot C \cdot R}} - 2 \right)}{2}$$

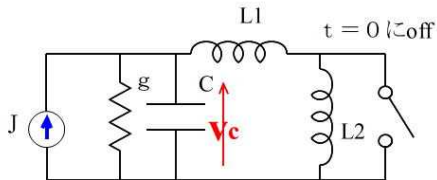
・・・正しい答え



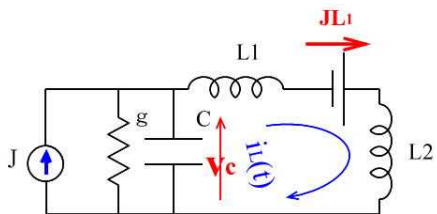
$$q(t) := C \cdot \frac{E}{2} - \int_0^t i(\tau) d\tau \rightarrow e^{-\frac{3 \cdot t}{2}} - \frac{e^{-3 \cdot t}}{2}$$

$q(t)$
 $i(t)$
 $v_C(t)$

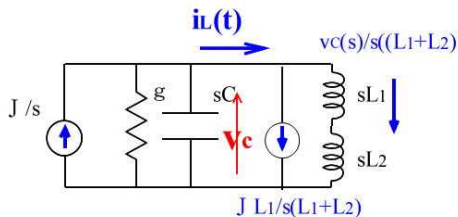
[例題 6.5] 右記の RLC 回路において、 $t = 0$ において L_2 を投入したときの直流過渡応答において、電流応答について、 $v_C(t)$ について解け。



[解] この RLC 過渡現象電流源問題は、 $t = 0$ までは L_1 に電流 J が流れているので、電圧源・電流源変換して、ミルマンの定理で求めれば良い。スイッチを外すまでは、L の電圧降下は 0 であるため、 $v_C(0) = 0$ である。



この状態で直列接続された L に流れる電流は右図の通りであるが、元々の回路の $i_L(t)$ は下向きの電流源を含むものであることに注意が必要である。



$$v_C(t) = \frac{\frac{J}{s} - \frac{L_1 \cdot J}{s \cdot (L_1 + L_2)}}{g + s \cdot C + \frac{1}{s \cdot (L_1 + L_2)}} \xrightarrow[\text{simplify}]{\text{assume, ALL} > 0, \text{invlaplace}} \frac{2 \cdot L_2 \cdot J \cdot \sinh\left(\frac{t \cdot \sqrt{L_1 \cdot g^2 - 4 \cdot C + L_2 \cdot g^2}}{2 \cdot C \cdot \sqrt{L_1 + L_2}}\right) \cdot e^{-\frac{g \cdot t}{2 \cdot C}}}{\sqrt{L_1 + L_2} \cdot \sqrt{L_1 \cdot g^2 - 4 \cdot C + L_2 \cdot g^2}}$$

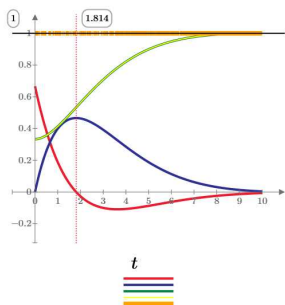
$$J = g \times v_C(t) + C \frac{dv_C(t)}{dt} + i_L(t)$$

$$v_C(t) = (L_1 + L_2) \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\therefore (L_1 + L_2)C \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + g(L_1 + L_2) \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = J(t)$$

$$L_1 \cdot J = (L_1 + L_2) \cdot J_{12} \xrightarrow{\text{solve, } J_{12}} \frac{L_1 \cdot J}{L_1 + L_2}$$

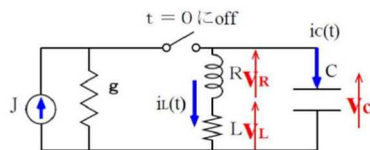
このミルマンの定理の式から、 JL_1 の運動量が、 $JL_1/(L_1 + L_2)$ の電流と $(L_1 + L_2)$ の合成インダクタンスによる運動量のように力学系の運動量保存則の電気回路版である**磁束保存則**が成り立っていることが確認できる。(グラフは $J = g = C = L_1 = 1, L_2 = 2$ の時)



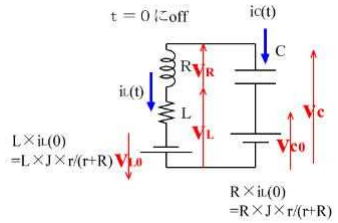
$$i_L(0) \xrightarrow[\text{simplify}]{\text{assume, ALL} > 0} \frac{L_1 \cdot J}{L_1 + L_2} = 0.333$$

●L や C に初期電流や初期電荷が含まれる場合はラプラス変換後の式において、これらの起電力を含めた素子部分の電圧や電流が、外部回路の電圧や電流となることに注意する必要がある。

[例題 6.6] 右記の RLC 回路において、 $t = 0$ においてスイッチをオフにした場合の直流過渡電流応答について、 $v_C(t)$ について解け。(グラフは $J = g = C = L = R = 1, g = \frac{1}{r}$ の時)



[解] このRLC過渡現象電流源問題は、 $t = 0$ までは L に電流 $J \frac{r}{r+R}$ が流れている。また、 C は $J \frac{rR}{r+R}$ に充電されているので、両者の起電力を考慮して、次のように解ける。



$$i_L(t) := \frac{L \cdot J \cdot \frac{r}{r+R} + \frac{J \cdot r \cdot R}{s \cdot r+R}}{R+s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} \xrightarrow[\text{simplify}]{\substack{\text{assume, ALL} > 0 \\ \text{invlaplace}}} \frac{\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(\frac{t \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{3}$$

$$v_C(t) := \frac{J}{s} \cdot \frac{r \cdot R}{r+R} - \frac{1}{s \cdot C} \cdot I_L(s) \xrightarrow[\text{simplify}]{\substack{\text{assume, ALL} > 0 \\ \text{invlaplace}}} \frac{\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(\frac{t \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)}{3}$$

