１． 直列接続と並列接続

電気回路では、直列接続と並列接続が用いられ、これらは双対性を成すものである。まずは抵抗 R とその逆数であるコンダクタンス G について、それぞれの直列接続と並列接続の合成等価回路の値の求め方を示す。この直列接続と並列接続はインピーダンスやアドミタンス、電圧源と電流源、そして 4 端子網の接続方法へと展開されていく。

R_i の直列接続の合成値　$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_i + \cdots = \sum_{i=1}^{n} R_i$　　(1.1)

G_i の並列接続の合成値　$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_i + \cdots = \sum_{i=1}^{n} G_i$　　(1.2)

インダクタンス L とインピーダンス Z は R と同じ、キャパシタンス C とアドミタンス Y は G と同じ取り扱いとなる。電圧源は直列接続が R と同じ、電流源は並列接続が C と同じ取り扱いとなる。電源に内部抵抗を考えない場合は、電圧源の並列接続と電流源の直列接続は取り扱えない（図 1、2 参照）。言い換えれば、電圧源に直列な内部抵抗や、電流源に並列な内部抵抗を考慮すれば、電圧源の並列接続と電流源の直列接続を等価回路に変換可能である。

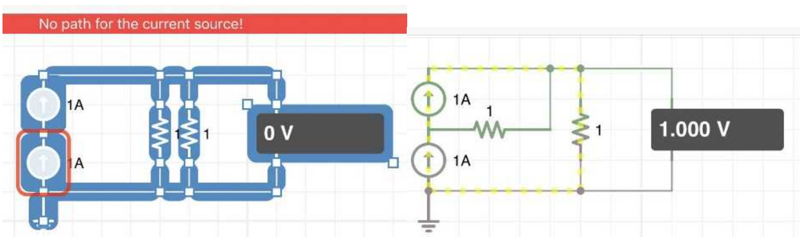


図 1．iCircuit©による電流源に負荷を含む回路ループが無い場合のエラー表示。
（右図ではエラーとならない。横向きの抵抗には、下の電流源で右向き１Aが、上の電流源で左向き１Aが流れ、合成電流は０となるが外してはいけない！
つまり、電流は１Aで黄色破線の外側ループを回っている。）

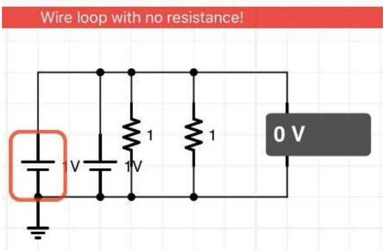


図 2．iCircuit©による電圧源に負荷を含む回路ループが無い場合のエラー表示。
（乾電池では並列接続が許されるのは、電池に内部抵抗があるからである）

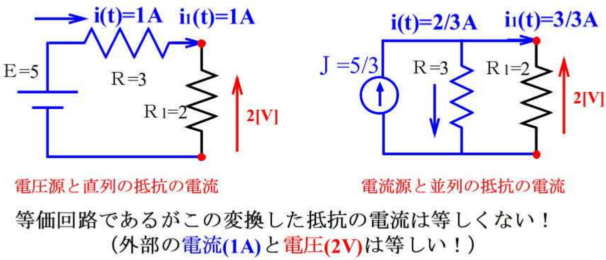


図 3．電圧源と電流源の変換と外部回路の電圧と電流

図 3 の様に 5 V の電圧源と 3 Ω の抵抗の直列接続は、5/3 A の電流限と 3 Ω の抵抗の並列接続と等価である。従って、外部回路（2 Ω の抵抗）に流れる電流と電圧降下は 1A と 2V で等しい。ここで注意すべきことは、電圧源・電流源変換に関係する抵抗またはインピーダンス（この場合 3　Ω）の電流（または電圧降下）は、**両者で基本的に等しくない**と言うことである。

- ●電圧源は直列接続可能で、抵抗（インピーダンス）と同じく直列がベクトル和となる。
- ●電流源は並列接続可能で、コンダクタンス（アドミタンス）と同じく並列がベクトル和となる。
- ●電圧源の並列接続と電流源の直列接続は基本的に取り扱えない。（内部抵抗を考慮すれば変換可能な場合もある。）

［例題 1.1］　抵抗を R[Ω]、その逆数であるコンダクタンスを G[S]とする。全て整

数で 10 個の素子 R=1,2..10、G=1,2..10 について、全て直列、全て並列に繋いだ場合の抵抗を求めよ。

［解］抵抗は直列が、コンダクタンスは並列が、各々の和となり、その双対である抵抗の並列とコンダクタンスの直列は、各々の逆数和の逆数が、合成抵抗と合成コンダクタンスになる。慣れるまでは単位に注意して求める必要がある。

全て直列の場合の抵抗値は、 $\sum_{R=1}^{10} R = 55$ $\sum_{G=1}^{10} \frac{1}{G} = 2.929$

全て並列の抵抗値は、 $\left(\sum_{R=1}^{10} \frac{1}{R}\right)^{-1} = 0.341$ $\left(\sum_{G=1}^{10} G\right)^{-1} = 0.018$

確認問題 1.1　2 素子の場合と 3 素子の場合の直列回路と並列回路の合成抵抗を文字式で求めよ。

$R_{2S} = R_1 + R_2$、$R_{2P} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$、$R_{3S} = R_1 + R_2 + R_3$、$R_{3P} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$

2 素子並列の和分の積のパターンを 3 素子並列に対して $R_{3P} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ と間違わないこと。

確認問題 1.2　無限に抵抗素子を並列接続した回路を考える。R=1, 2, .., ∞の場合、R=2, 4, 8 .. 2^n..と 2^n の場合、$R_n=n^2$ と 2 乗数の場合、奇数の 2 乗数の場合、偶数の 2 乗数の場合についてそれぞれ求めよ。例えば、奇数の 2 乗数の和は方形波のフーリエ解析で用いることになる。

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \to 1$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \frac{\pi^2}{6}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 \cdot n - 1)^2} \to \frac{\pi^2}{8}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 \cdot n)^2} \to \frac{\pi^2}{24}$

［例題 1.2］　インピーダンス $Z_1 = R_1 + jX_1 [\Omega]$と$Z_2 = R_2 + jX_2 [\Omega]$の直列および並列回路の合成インピーダンスとアドミタンスを求めよ。

［解］複素数表示したインピーダンスやアドミタンスは、実部である抵抗またはコンダクタンスと、虚部であるリアクタンスまたはサセプタンスを、それぞれ成分ごとに合成すれば良い。その後、その合成値に対して逆数を求める必要がある。

$$Z_S = Z_1 + Z_2 = R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)[\Omega]$$

$$Y_S = \frac{1}{Z} = \frac{1}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} = \frac{1}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} \cdot \frac{(R_1 + R_2) - j(X_1 + X_2)}{(R_1 + R_2) - j(X_1 + X_2)}$$

$$= \frac{(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2} - j\frac{(X_1+X_2)}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2}\ [\mathrm{S}]$$

$$Z_P = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{(R_1+jX_1)(R_2+jX_2)}{(R_1+R_2)+j(X_1+X_2)} = \frac{(R_1+jX_1)(R_2+jX_2)}{(R_1+R_2)+j(X_1+X_2)} \cdot \frac{(R_1+R_2)-j(X_1+X_2)}{(R_1+R_2)-j(X_1+X_2)}$$

$$= \frac{R_1\left({R_2}^2 + {X_2}^2\right) + R_2({R_1}^2 + {X_1}^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{X_1\left({R_2}^2 + {X_2}^2\right) + X_2({R_1}^2 + {X_1}^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

$$Z_P := \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \xrightarrow{rectangular} \frac{R_1 \cdot {X_2}^2 + R_2 \cdot {X_1}^2 + R_1 \cdot {R_2}^2 + {R_1}^2 \cdot R_2}{{X_2}^2 + 2 \cdot X_1 \cdot X_2 + {X_1}^2 + {R_2}^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 + {R_1}^2} + \frac{X_1 \cdot {X_2}^2 + \left({X_1}^2 + {R_1}^2\right) \cdot X_2 + {R_2}^2 \cdot X_1}{{X_2}^2 + 2 \cdot X_1 \cdot X_2 + {X_1}^2 + {R_2}^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 + {R_1}^2} \cdot 1i$$

$$Y_P = \frac{1}{Z_P} = \frac{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)}{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)} = \frac{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)}{(R_1 R_2 - X_1 X_2) + j(X_1 R_2 + X_2 R_1)}$$

$$= \frac{(R_1+R_2)(R_1R_2-X_1X_2)+(X_1+X_2)(X_1R_2+X_2R_1)}{(R_1R_2-X_1X_2)^2+(X_1R_2+X_2R_1)^2} - j\frac{(R_1+R_2)(X_1R_2+X_2R_1)-(X_1+X_2)(R_1R_2-X_1X_2)}{(R_1R_2-X_1X_2)^2+(X_1R_2+X_2R_1)^2}\ [\mathrm{S}]$$

$${Z_P}^{-1} \xrightarrow{rectangular} \frac{R_1 \cdot {X_2}^2 + R_2 \cdot {X_1}^2 + R_1 \cdot {R_2}^2 + {R_1}^2 \cdot R_2}{\left({X_1}^2 + {R_1}^2\right) \cdot {X_2}^2 + {R_2}^2 \cdot {X_1}^2 + {R_1}^2 \cdot {R_2}^2} - \frac{X_1 \cdot {X_2}^2 + \left({X_1}^2 + {R_1}^2\right) \cdot X_2 + {R_2}^2 \cdot X_1}{\left({X_1}^2 + {R_1}^2\right) \cdot {X_2}^2 + {R_2}^2 \cdot {X_1}^2 + {R_1}^2 \cdot {R_2}^2} \cdot 1i$$

文字式だと、たった 2 素子でも意外と演算結果が複雑になることが分かる。

確認問題 1.3　インピーダンス $Z_1 = R + jX[\Omega]$ と $Z_2 = R - jX[\Omega]$ の複素共役なインピーダンスの、直列および並列回路の合成インピーダンスとアドミタンスを求めよ。

$$Z_S := Z_1 + Z_2 \rightarrow 2 \cdot R$$

、

$$Z_P := \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \xrightarrow{simplify} \frac{X^2}{2 \cdot R} + \frac{R}{2}$$

［**例題 1.3**］　電圧源 E と電流源 I の内部抵抗を含む等価回路を示し、それぞれの直列等価回路と並列等価回路を求めよ。

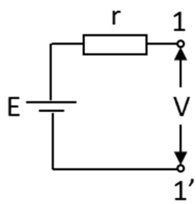


図 2(a).　電圧源

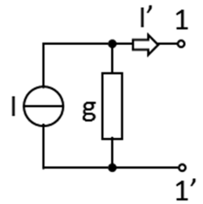
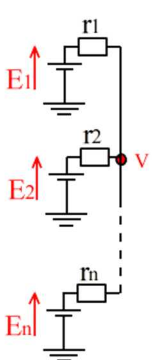


図 2(b).　電流源

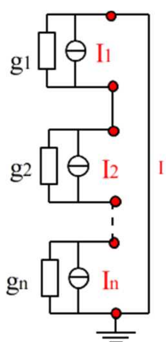
［解］電圧源と電流源の等価回路は上記図 2 であり、両者の変換は$E = rI = I/g$ のオームの法則の形である。電圧源が複数直列になった場合は、合成起電力が各起電力の和、合成内部抵抗が各内部抵抗の和となる。また、電流源が複数並列になった場合は、合成電流源が各電流源の和、合成内部コンダクタンスが各内部コンダクタンスの和となる。交流電圧源や交流電流源の場合には、それぞれの電源のフェーザベクトルの合成となり、インピーダンスまたはアドミタンスの合成となる。

電圧源が複数並列になった場合は、全ての電圧源を電流源に変換し、上記電流源の合成方法で、等価電流源を求め等価電圧源に変換する。また、電流源が複数直列になった場合は、各々の等価電圧源を求め、合成電圧源の等価回路から等価な電流源回路に変換して、合成電流源の値と合成内部コンダクタンスの値を求める。

電源の周波数が異なる場合は、基本的に重ね合わせの理により、各周波数成分ごとに求め、合成することとなる。



$$V := \frac{\frac{\boxed{E_1}}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} + \cdots + \frac{E_n}{r_n}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}}$$



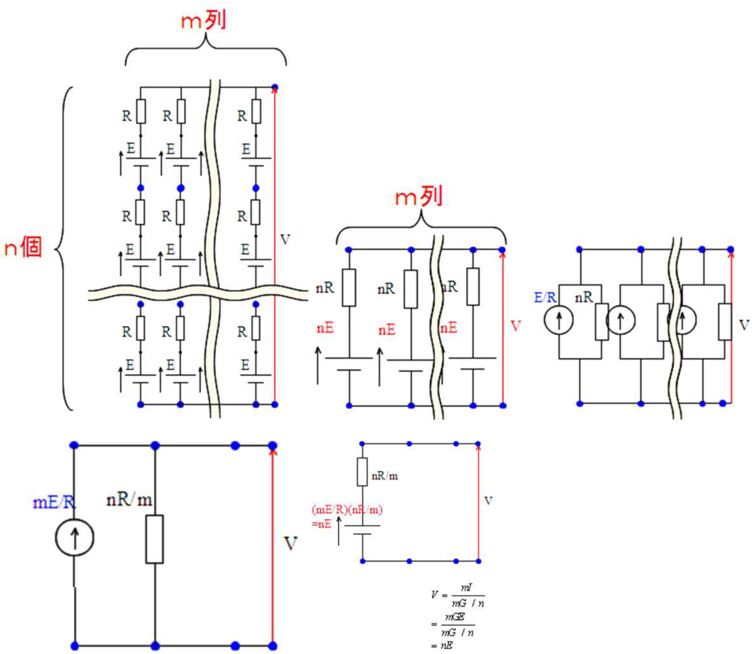
$$I := \frac{\frac{\boxed{I_1}}{g_1} + \frac{I_2}{g_2} + \cdots + \frac{I_n}{g_n}}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_n}}$$

確認問題 1.4　それぞれ 3 個の電圧源と電流源の、直列及び並列回路の、開放電圧及び短絡電流をそれぞれ求めよ。ただし、3 個の電源は等しく、$E = rI = I/g$ とする。

電圧源の場合、直列時の開放電圧は$3E$。並列時の開放電圧はE。直列時の短絡電流は$I = \frac{3E}{3r} = E/r$。並列時の短絡電流は$3I$。

電流源の場合、直列時の開放電圧は$3E$。並列時の開放電圧はE。直列時の短絡電流は$I = \frac{3E}{3r} = E/r$。並列時の短絡電流は$3I$。

確認問題 1.5　n 個直列の m 列の電圧源 E（内部抵抗 R）の等価回路を求めよ。



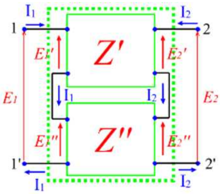
従って、起電力は n 個直列なので n 倍となるが、内部抵抗は m 列並列なので nR/m となる。

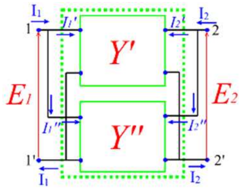
［例題 1.4］　下記に示す 2 つの 4 端子網の直列接続と並列接続について、各々の合

成回路の 4 端子網の、回路外の電圧と電流の関係を与える行列表現を、最も簡潔なパラメータにて表せ。

$$E_1 := \boxed{E_1}' + E_1'' \text{、} \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \boxed{Z_{11}} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$I_1 := \boxed{I_1}' + I_1'' \text{、} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \boxed{Y_{11}} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$



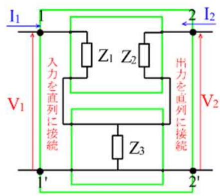


［解］直列接続にはインピーダンスパラメータの和が、並列接続にはアドミタンスパラメータの和が、合成 4 端子網の表現として適切であると、以上で述べた 2 端子網の接続方法との整合性が取れる。従って、これらの回路表現は下記となる。

$$Z' := \begin{bmatrix} \boxed{Z_{11}}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{bmatrix} \quad Z'' := \begin{bmatrix} \boxed{Z_{11}}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix} \quad Z := Z' + Z'' \rightarrow \begin{bmatrix} Z_{11}'' + Z_{11}' & Z_{12}'' + Z_{12}' \\ Z_{21}'' + Z_{21}' & Z_{22}'' + Z_{22}' \end{bmatrix}$$

$$Y' := \begin{bmatrix} \boxed{Y_{11}}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{bmatrix} \quad Y'' := \begin{bmatrix} \boxed{Y_{11}}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{bmatrix} \quad Y := Y' + Y'' \rightarrow \begin{bmatrix} Y_{11}'' + Y_{11}' & Y_{12}'' + Y_{12}' \\ Y_{21}'' + Y_{21}' & Y_{22}'' + Y_{22}' \end{bmatrix}$$

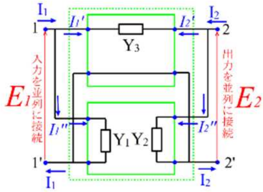
確認問題 1.6　右記に示すＴ型 4 端子網のインピーダンス行列を、上部と下部の 2 つの 4 端子網のインピーダンス行列の和により求めよ。



$$Z' := \begin{bmatrix} \boxed{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \text{、} \quad Z'' := \begin{bmatrix} \boxed{Z_3} & Z_3 \\ Z_3 & Z_3 \end{bmatrix} \text{、}$$

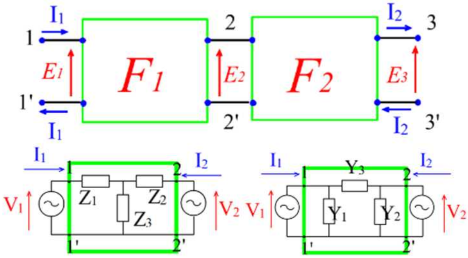
$$Z_T := Z' + Z'' \rightarrow \begin{bmatrix} Z_3 + Z_1 & Z_3 \\ Z_3 & Z_3 + Z_2 \end{bmatrix}$$

確認問題 1.7　右記に示すπ型 4 端子網のアドミタンス行列を、上部と下部の 2 つの 4 端子網のアドミタンス行列の和により求めよ。



$$Y' := \begin{bmatrix} \boxed{Y_3} & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_3 \end{bmatrix}、\quad Y'' := \begin{bmatrix} \boxed{Y_1} & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}、\quad Y := Y' + Y'' \rightarrow \begin{bmatrix} Y_3+Y_1 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_3+Y_2 \end{bmatrix}$$

確認問題 1.8　右記に示す接続方法は縦続接続であり、直列接続ではない事に注意すること。この縦続接続で T 型とπ型の 4 端子網の F パラメータを求め、F パラメータからインピーダンス行列およびアドミタンス行列への変換により、上記確認問題の答えを確認せよ。



$$F_1 := \begin{bmatrix} 1 & \boxed{Z_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}、\quad F_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\boxed{Z_3}} & 1 \end{bmatrix}、\quad F_3 := \begin{bmatrix} 1 & \boxed{Z_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}、\quad F_T := F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \xrightarrow{factor} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_3}\cdot(Z_3+Z_1) & \dfrac{1}{Z_3}\cdot((Z_2+Z_1)\cdot Z_3 + Z_1\cdot Z_2) \\ \dfrac{1}{Z_3} & \dfrac{1}{Z_3}\cdot(Z_3+Z_2) \end{bmatrix}$$

$$F_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{Y_1} & 1 \end{bmatrix}、\quad F_2 := \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{\boxed{Y_3}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}、\quad F_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{Y_2} & 1 \end{bmatrix}、\quad F_\pi := F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{Y_2}{Y_3}+1 & \dfrac{1}{Y_3} \\ \dfrac{Y_2\cdot(Y_3+Y_1)}{Y_3}+Y_1 & \dfrac{Y_3+Y_1}{Y_3} \end{bmatrix}$$

$$F := F_T \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{Z_3+Z_1}{Z_3} & \dfrac{Z_3\cdot(Z_2+Z_1)+Z_1\cdot Z_2}{Z_3} \\ \dfrac{1}{Z_3} & \dfrac{Z_3+Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}、\quad Z_T := \begin{bmatrix} \dfrac{F_{0,0}}{F_{1,0}} & \dfrac{1}{F_{1,0}} \\ \dfrac{1}{F_{1,0}} & \dfrac{F_{1,1}}{F_{1,0}} \end{bmatrix} \xrightarrow{simplify} \begin{bmatrix} Z_3+Z_1 & Z_3 \\ Z_3 & Z_3+Z_2 \end{bmatrix}$$

$$F := F_\pi \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{Y_2}{Y_3}+1 & \dfrac{1}{Y_3} \\ \dfrac{Y_2\cdot(Y_3+Y_1)}{Y_3}+Y_1 & \dfrac{Y_3+Y_1}{Y_3} \end{bmatrix}、\quad Y_\Pi := \begin{bmatrix} \dfrac{F_{1,1}}{F_{0,1}} & \dfrac{-1}{F_{0,1}} \\ \dfrac{-1}{F_{0,1}} & \dfrac{F_{0,0}}{F_{0,1}} \end{bmatrix} \xrightarrow{simplify} \begin{bmatrix} Y_3+Y_1 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_3+Y_2 \end{bmatrix}$$