# 第28回発展方程式若手セミナー
# アブストラクト集

2006年8月7日（月） ～ 2006年8月10日（木）

六甲山ＹＭＣＡ（神戸市灘区六甲山町）

# 第28回発展方程式若手セミナー開催要項

**日時**

2006年8月7日（月）15:00　～　2006年8月10日（木）12:00

**会場**

六甲山ＹＭＣＡ　　〒657-0101 神戸市灘区六甲山町北六甲 875
Tel:　078-891-0050　　Fax:　078-891-0054

会議室情報

(1) ＯＨＰ　2台, スクリーン　2枚
(2) ＰＣ１台, プロジェクター　１台
(3) ホワイトボード　2枚　（備え付け式と移動式）
(4) 指示棒　1本, レーザーポインタ　1本
(5) マイク3本（うち１つはピンマイク）

宿泊施設情報

(6) チェックイン：15時より，チェックアウト：10時まで
(7) 入浴時間：16時から23時まで
(8) 客室：浴衣・タオル・ハブラシ常備（バスタオル：200円で貸し出し，髭剃り：100円で販売）
(9) 大浴場：シャンプー・リンス・ボディソープ・ドライヤー常備
(10) ランドリーサービス有（無料）

**開催本部**

代表： 白川　健（神戸大学工学部応用数学教室）
副代表： 深尾　武史 （ 岐阜工業高等専門学校　一般（自然））
e-mail: wakate2006@boar.kobe-u.ac.jp

**後援** この研究集会は下記の補助金により助成されています。

科学研究費　基盤研究 (S) 研究課題番号:15104001
「非線形偏微分方程式の大域的可解性と解の漸近挙動に関する統一理論」
研究代表者　小薗　英雄

科学研究費　基盤研究 (A) 研究課題番号:15204008
「非線形発展方程式の幾何学的対称性と解の構造」
研究代表者　堤　誉志雄

科学研究費　萌芽研究 研究課題番号:17650235
「非線形解析学の新展開と科学教育学習プログラムの開発」
研究代表者　剣持　信幸

科学研究費　若手研究 (B) 研究課題番号:17740099
「自由境界を伴う非線形現象を記述する力学系の大域的安定性の研究」
研究代表者　白川　健

科学研究費　若手研究 (B) 研究課題番号:18740095
「強い非線形性を拡散項に持つ偏微分方程式の可解性とその応用」
研究代表者　深尾　武史

# プログラム

# 第28回発展方程式若手セミナー プログラム

平成18年8月7日（月）15時 ~ 平成18年8月10日（木）11時半

特別講演2件, 一般講演31件

開催本部　代表：白川 健（神戸大）, 副代表：深尾 武史（岐阜高専）

**8月7日（月）**

| | |
|---|---|
| 15:00-15:15 | 自己紹介 |
| 座長 | 澤田 宙広（早大） |
| 15:25-15:50 | 山崎 教昭（室蘭工大）<br>楕円・放物型変分不等式に対する最適制御問題について |
| 15:50-16:20 | 新國 裕昭（首都大）<br>Identification of the absent spectral gaps in a class of generalized Kronig-Penney Hamiltonians |
| 16:20-16:40 | 佐藤 翔大（東北大）<br>Life span of solutions of superlinear heat equation |
| 20分休憩 | |
| 座長 | 山崎 教昭（室蘭工大） |
| 17:00-18:30 | 【特別講演】 儀我 美一（東大）<br>特異拡散方程式とその応用 |
| 18:30-20:00 | 夕食 |
| 座長 | 赤木 剛朗（芝浦工大） |
| 20:00-21:30 | ショート・コミュニケーション |

**8月8日（火）**

| | |
|---|---|
| 8:00-9:00 | 朝食 |
| 座長 | 中村 能久（熊本大） |
| 9:30-10:00 | 山岸 弘幸（阪大）<br>リーマンゼータ関数, ベルヌーイ多項式とソボレフ不等式の最良定数 |
| 10:00-10:25 | 大屋 博一（早大）<br>拡散項を伴う3種 population model の解析について |
| 10分休憩 | |
| 座長 | 大塚 岳（東大） |
| 10:35-11:05 | 佐藤 典弘（早大）<br>有界領域における Gray-Scott モデルの定常解構造について |
| 11:05-11:30 | 松澤 寛（沼津高専）<br>双安定反応拡散方程式の遷移層を持つ定常解について |
| 11:30-12:00 | 米田　剛（東大）<br>Functional differential equations of a type similar to $f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$ and it's application to Poisson's equation |
| 12:00-13:30 | 昼食 |
| 座長 | 大屋 博一（早大） |
| 13:30-14:00 | 若狭 徹（早大）<br>振り子の方程式の線形化問題に対するすべての固有値・固有関数について |
| 14:00-14:30 | 竹田 寛志（東北大）<br>消散項付き非線形波動方程式の外部問題の解について |
| 14:30-14:55 | 中村 能久（熊本大）<br>Asymptotics of solutions to nonlinear Schrödinger equations with Stark potntial (仮題) |
| 15分休憩 | |

| | |
|---|---|
| 座長 | 久保 隆徹（早大） |
| 15:10-15:40 | 山本 征法（東北大）<br>半導体デバイスモデルに由来する Drift-diffusion 方程式系の解の減衰評価について |
| 15:40-16:10 | 小林 遼（九大）<br>Drift-diffusion 型モデルの解の減衰評価と漸近挙動について |
| 16:10-16:40 | 井出 健太郎（九大）<br>消散的 Timoshenko 系の解の減衰評価と漸近挙動について |
| 15 分休憩 | |
| 座長 | 中口 悦史（阪大） |
| 16:55-17:25 | 川上 竜樹（東北大）<br>Asymptotic behavior of the solutions for the semilinear heat equations in $\mathbb{R}^N$ |
| 17:25-17:55 | 加藤 正和（阪大）<br>Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations |
| 17:55-18:25 | 森山 繁（首都大）<br>Asymptotics for variational problem with critical growth and slightly positive Dirichlet data |
| 18:30-20:00 | 夕食 |
| 座長 | 赤木 剛朗（芝浦工大） |
| 20:00-21:30 | ショート・コミュニケーション |

**8 月 9 日（水）**

| | |
|---|---|
| 8:00-9:00 | 朝食 |
| 座長 | 松澤 寛（沼津高専） |
| 9:40-9:55 | 内藤 由香（早大）<br>$L^p$-$L^q$ estimates for Cauchy problems of linear thermoelastic with second sound and classical thermoelasticity in 3-D |
| 9:55-10:20 | 中口 悦史（阪大）<br>走化性・増殖方程式とその有限要素近似系のグローバルアトラクタの次元評価 |
| 15 分休憩 | |
| 座長 | 山口 範和（早大） |
| 10:35-11:00 | 澤田 宙広（早大）<br>リプシッツ関数を初期値とした場合のナヴィエ・ストークス方程式の可解性 |
| 11:00-11:25 | 村上 尊広（阪大）<br>圧縮性流体力学モデルの解の漸近挙動について |
| 11:25-11:45 | 久保 隆徹（早大）<br>On the Navier-Stokes flows with a nontrivial flux condition in an aperture domain |
| 12:00-13:30 | 昼食 |
| 座長 | 石渡 通徳（東北大） |
| 13:30-14:00 | 池田 幸太（東北大）<br>微小重力環境でのすす燃焼パターンの反応拡散モデルについて |
| 14:00-14:30 | 水野 将司（東北大）<br>退化準線形放物型方程式に対する正則性評価について |
| 10 分休憩 | |
| 座長 | 石渡 通徳（東北大） |
| 14:40-15:05 | 大塚 岳（東大）<br>多重井戸型ポテンシャルによる Allen-Cahn 型の方程式の特異極限について |
| 15:05-15:30 | 五十嵐 威文（日大）<br>反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について |
| 10 分休憩 | |

| | |
|---|---|
| 座長 | 伊藤 昭夫（近畿大） |
| 15:40-16:05 | 永安 聖（北大）<br>多層からなる棒状媒体に対する非破壊検査の逆問題 |
| 16:05-16:30 | 大塚 厚二（広島国際学院大）<br>破壊現象の数理モデル |
| 20 分休憩 | |
| 座長 | 横田 智巳（東京理科大） |
| 16:50-18:20 | 【特別講演】 木村 正人（九大）<br>亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析 |
| 18:30-21:00 | 懇親会 |

**8 月 10 日（木）**

| | |
|---|---|
| 8:00-9:00 | 朝食 |
| 座長 | 瀬片 純市（福岡教育大） |
| 9:30-10:00 | 下條 昌彦（東大）<br>半線形熱方程式の空間無限遠での爆発とそのプロファイル |
| 10:00-10:30 | 関 行宏（東大）<br>Blow-up directions for quasilinear parabolic equations |
| 10 分休憩 | |
| 座長 | 大崎 浩一（宇部高専） |
| 10:40-11:10 | 河内 一樹（東大）<br>年齢構造を考慮した流言伝播の数理モデル |
| 11:10-11:30 | 報告集について・次年度セミナー引継ぎ |

## ショートコミュニケーション（1日目，2日目 20:00 〜 21:30）

若手セミナーでは毎年、初日と 2 日目の夕食後に「ショートコミュニケーション」というイベントを企画しており、ここでは院生の方（講演者は除く）に自己紹介を兼ねた簡単な「近況報告」のようなものをお願いしております。「近況報告」というと少々堅いイメージが付きまといますが、実際はそんなに堅苦しいものではなく、現在ご自身が研究室でどのようにすごされているのかをそのまま紹介してくだされば大丈夫です。

持ち時間も 1 人 5～10 分ほどで、毎年研究室の思わぬ暴露話などが出たりなどして、話に花が咲いています。どうかあまり難しくお考えにならずに、ぜひともひとつご協力くださいますよう、よろしくお願いいたします。

以下は、今回のショートコミュニケーションにて発表をお願いする方々のリストです。リストはあいうえお順に並んでいますが、実際の発表の順番は座長が改めて決めます。

- 猪奥 倫左 (いおく のりすけ：東北大 M1)
- 岩川 風 (いわかわ ふう：熊本大 B4)
- 岩渕 司 (いわぶち つかさ：東北大 M1)
- 大枝 和浩 (おおえだ かずひろ：早大 M2)
- 小野寺 有紹 (おのでら みちあき：東北大 M2)
- 加納 理成 (かのう りせい：千葉大 D1)
- 紀平 大樹 (きひら ひろき：早大 M1)
- Gutierrez Michael (ぐっちぇれす まいける：早大 M2)
- 久保 竹清 (くぼ たけきよ：九大 M1)
- 熊崎 耕太 (くまざき こうた：岐阜大 M2)
- 呉 穎穎 (ご えいえい：首都大学東京 D1)
- 三瓶 恵美 (さんぺい えみ：東海大 M1)
- 塩見 崇史 (しおみ たかふみ：早大 M1)
- 土井 一幸 (どい かずゆき：阪大 M1)
- 中川 和重 (なかがわ かずしげ：埼玉大 D1)
- 原田 潤一 (はらだ じゅんいち：早大 M3)
- 平林 由梨 (ひらばやし ゆり：早大 M1)
- 村瀬 勇介 (むらせ ゆうすけ：千葉大 D1)
- 吉實 雄紀 (よしざね ゆうき：早大 M2)
- 渡辺 めぐみ (わたなべ めぐみ：早大 M1)

# 特別講演（2件）

## 特別講演

# 特異拡散方程式とその応用

儀我美一（東大数理）

特異拡散方程式は、拡散係数が無限大になりうる拡散方程式を表す総称である。例えば $p-$ ラプラシアン $\Delta_p u = \text{ div } (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ による熱方程式は $1 \leq p < 2$ のとき特異拡散方程式である。本講演で考える方程式はこの $p = 1$ に対応するクラスであり、形式的には偏微分方程式であるが、未知関数の時間微分が空間の無限小の量だけでは決まらない、非局所性を持つものである。問題の起源をいくつか述べる。

(i) **結晶成長の問題から：**$\Gamma_t$ の時刻 $t$ をパラメーターとする。$\Gamma_t$ の単位ベクトル $\mathbf{n}$ 方向の成長速度を $V$ とする。$\Gamma_t$ は例えば結晶表面を表すとする。界面支配モデルの例として曲率流方程式

$$V = -M(\mathbf{n})(\mathrm{div}_{\Gamma_t}\nabla\gamma(\mathbf{n}) + C(x,t)) \tag{1.1}$$

は $C = 0$ の場合、金属の antiphase 粒界の運動の記述によく用いられる。ここで $\gamma$ は表面エネルギーを表し、$\mathbf{R}^n$ 上の正斉次１次の凸関数とする。この量は結晶構造により定められているので既知とする。$M$ は動的係数で正とし、既知とする。$C$ は結晶を成長させる駆動力である。div は $\Gamma_t$ 上での発散を表す。$\gamma$ が $C^2$ 級で $M$ が連続かつ $C$ が連続かつ $x$ についての微分 $\nabla_x C$ が局所有界であれば、（1.1）の初期値関数は少なくとも時間大域的に広義解（等高面法による解 $\{\Gamma_t\}$ ）を持つことが知られている [5]。しかし J. Taylor [16] や S. Angenent-M. Gurtin [2] が提唱したクリスタラインエネルギーの場合は $\gamma$ は区分的１次であり $C^1$ ですらない。この時（1.1）は（非局所的）特異拡散方程式である。今のところ $C$ が定ベクトルで空間次元 $n = 2$ の時のみ等高面法による解が一意存在することが知られているだけで [3]、一般の場合はまだ未解決である。最近 3 次元の場合 G. Bellettini らのグループにより $M = \gamma$ で $C \equiv 0$ の場合、初期曲面が凸の場合に解の存在が示された。論文 [3] のアプローチは粘性解論を用いるもので Bellettini らのは変分法を用いるものである。

(ii) **画像処理の問題：**画像のノイズを取る問題で全変動流方程式つまり

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{ div } (\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + \lambda(f-u)\ \lambda > 0$$

が用いられることがある。$f$ は既知関数とする。$u$ は画像の濃淡を表す関数である。もともと L. I. Rudin-S. Osher-E. Fatemi [13] により提唱された。この種の問題は劣微分方程式論や非線形半群論を用いることによって存在、一意性等が研究されている。例えば [1]、[11]。ここでもし $u$ がベクトル値で $|u| = 1$ という束縛をつけると全変動流方程式は $1-$ 調和写像流方程式となり

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{ div } (\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + |\nabla u|u$$

となる。こちらはカラー画像の色調からノイズを取る一方式である [15]。この方程式については定義域が 1 次元の場合 [7] に時間大域解の存在が区分的定数の初期値について示されているが、高次元の場合は局所解の存在が初期エネルギーが小さく、初期値自身滑らかな場合に示せただけである [6]。その離散モデルの研究も行われている [8]。

(iii) **多結晶の金属粒の平均的な方向場の動きについて：**これは小林氏ら [12] によって提唱されたモデルで、全変動流が用いられている。ここでも値域は $\mathbf{R}$ よりも $\mathbf{S}^1$

であったりするので 1− 調和写像流の研究が欠かせない。その他、白川氏 [14] により別のタイプの束縛のついた全変動流も研究されている [10]。

(iv) **衝撃波の等高面法による計算：**バーガーズ方程式の解 $y = u(x,t)$ のグラフをそのまま $xy$ 平面での曲面の運動と思って変形させると、関数のグラフとはみなせなくなってしまう。垂直方向 $y$ だけの特異拡散を導入することにより等高面法により不連続解をとらえることが可能になった。本講演ではこの点を [4] や [17] にそって主に述べる。

(v) **雪結晶成長を記述するステファン問題への応用：**これは P. Rybka と著者との一連の共同研究による。例えばサーベイ論文 [9] を参照。(1.1) が外場と連立されているモデルである。本講演ではこれについても簡単にふれる。

## References


[1] F. Andrew-Vaillo, V. Caselles and J. M. Mázon, Existence and uniqueness of a solution for a parabolic quasilinear problem for linear growth functionals with $L^1$-data, *Math. Ann*, **322**, (2002), 139-206.

[2] S. B. Angenent and M. E. Gurtin, Multiphase thermomecharics with interfacial structure 2, Evolution of an isothermal interface, *Arch. Rational Mech. Anal*, **108**, (1989), 323-391.

[3] M.-H. Giga and Y. Giga, Generalized motion by nonlocal curvature in the plane, *Arch Rational Mech. Anal*, **159**, (2001), 295-333.

[4] M.-H. Giga and Y. Giga, Minimal vertical singular diffusion preventing overturing for the Burgers equation, *Recent Advances in Scientific Computing and Partial Differential Equations, Contemp. Math. Amer. Math. Soc. Providence*, **330**, (2003), 73-88.

[5] Y. Giga, Surface Evolution Equations - a level set approach, *Birkhauser*, (2006).

[6] Y. Giga, Y. Kashima and N. Yamazaki, Local solvability of a constrained gradient system of total variation, *Abstract and Applied Analysis*, **8**, (2004), 651-682.

[7] Y. Giga and R. Kobayashi, On constrained equations with singular diffusivity, *Methods and Applications of Analysis*, **10**, (2003), 253-278.

[8] Y. Giga, H. Kuroda and N. Yamazaki, An existence result for a discretized constrained gradient system of total variation flow in color image processing, *Interdisciplinary Information Sciences*, **11**, (2005), 199-204.

[9] Y. Giga and P. Rybka, Faceted crystals grown from solution - a Stefan type problem with a singular interfacial energy, *Hokkaido Univ. Preprint Series in Math*, **#753**, (2005). http://eprints.math.sci.hokudai.ac.jp/

[10] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation function with constraint, *Nonlinear Anal*, **46**, (2001), 435-455.

[11] R. Kobayashi and Y. Giga, Equations with singular diffusivity, *J. Stat. Phys*, **95**, (1999), 1187-1220.

[12] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, A continuum model of grain boundaries, *Physica D*, **140**, (2000), 141-150.

[13] L. I. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, **60**, (1992), 259-268.

[14] K. Shirakawa, Parabolic variational inequality associated with the total variation functional, *Nonlinear Anal*, **47**, (2001), 3195-3206.

[15] B. Tang, G. Sapiro and V. Caselles, Color image enhancement via chromaticity diffusion, *IEEE Trans on Image Processing*, **10**, (2001), 701-707.

[16] J. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry, *in Differential Geometry, B. Lawson and K. Tanenblat, eds., Proceedings of the Conference on Differential Geomerty, Rio de Janeiro, Pitman Monograph Surveys Pure Appl. Math*, **52**, (1991), 321-336.

[17] Y.-H. R. Tsai, Y. Giga and S. Osher, A level set approach for computing discontinuous solutions of a class of Hamilton-Jacobi equations, *Math. Comp*, **72**, (2003), 159-181.

**【特別講演】**

# 亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析

木村 正人 (九州大学 大学院数理学研究院)

## 1. 亀裂進展におけるエネルギー解放率

弾性体内部を進展する亀裂の挙動を理解するための試みは Griffith [5] に始まったとされ，現在に至るまで，工学・物理・数学などの分野において非常に多くの研究が様々な角度から行われている．破壊力学での Griffith 理論は，亀裂進展力となるエネルギー解放率 $G$ を中心に一般化の試みを経つつ，今でも破壊力学，亀裂進展の数理モデリングとその解析において重要な役割を果たしている (例えば，[4] や [7]–[11] とその参考文献).
慣性項が無視できる範囲で負荷を徐々に変化させたとき，弾性板における直線形状の亀裂が同じ方向に進展するとき，亀裂進展長さに対する解放エネルギーの比率 $G$ が新しい亀裂面を作るための仕事 $G_c$ を越すとき，すなわち $G \geq G_c$ を Griffith [5] は脆性破壊の発生条件とした．そのため，亀裂形状や負荷との関連が明確になる $G$ の数学的表現が必要となる．
エネルギー解放率とは次のように定義される量である．今，$\mathbb{R}^n$ 内の（亀裂のない）有界な弾性体 $\Omega_*$ に，$n-1$ 次元亀裂 $\Sigma$ が入っているものとする．$0 \leq t < T$ をパラメータとする仮想亀裂進展 $\Sigma(t)$ を考える．ここで，$\Sigma = \Sigma(0) \subset \Sigma(t_1) \subset \Sigma(t_2)$ $(0 \leq^\forall t_1 \leq^\forall t_2 < T)$ である．
慣性が無視できる範囲での遅い亀裂進展においては，$\Omega_* \setminus \Sigma(t)$ における弾性エネルギー $E(t)$ は

$$(1) \qquad E(t) := \min_v \int_{\Omega_* \setminus \Sigma(t)} W(x, v(x), \nabla v(x)) dx,$$

で与えられる．ここで，$v$ は与えられた境界条件を満たす変位場であり，
$W(x, v(x), \nabla v(x))$ は静弾性エネルギー（外力がある場合はそれを含むポテンシャルエネルギー）密度である．
そのとき，仮想亀裂進展 $\{\Sigma(t)\}_{0 \leq t < T}$ に伴う，$t = 0$ におけるエネルギー解放率 $G$ は，

$$(2) \qquad G := \lim_{t \to +0} \frac{E(0) - E(t)}{|\Sigma(t) \setminus \Sigma|},$$

で与えられる．$E(t) \leq E(0)$ であることから，もし，この極限が存在すれば，$G \geq 0$ である．
Rice[14] と Cherepanov[2] によるエネルギー解放率の表現（J 積分）は，等方な定数係数線形 2 次元弾性体における直線亀裂の場合の研究で，後に続く研究も 2 次元問題が主であった．Ohtsuka [7]–[10] や Ohtsuka-Khludnev [11] は，弱い非線形楕円型方程式（系）を含む一般次元の曲面亀裂の場合に数学的定式化を行い，エネルギー解放率の存在とその領域積分表現，及び一般 J 積分理論の展開を行った．そこで使われた手法は，形状感度解析のアイデアを用いて仮想亀裂進展を表現し（注意 3.5 を参照），エネルギー最小原理 (1) に基づいて，(2) の右辺に現れる差分を丁寧に評価するものであった．
エネルギー解放率の数学的取り扱いの難しさは，亀裂の先端（縁）における変位場や応力場の解の持つ特異性にある．2 次元問題ではこの特異項の係数は応力拡大係数と呼ばれ，エネルギー解放率は応力拡大係数のみに依存することが証明されている．3 次元問題や変数係数 2 次元問題などでの応力拡大係数に関する数学解析は，現在でも研究が続い

ており未解決な部分も多く残されている．それについては，上記文献や [15], [16] などを参照されたい．
本稿では，[8] における数学的定式化をもとに Lipschitz 連続な領域写像を用いて，その精密化を図り，更に，Fréchet 微分を用いたエネルギー解放率の計算を行い，その領域積分表現を得る．そのための準備として，Banach 空間における抽象的パラメータ付き変分問題の一般論を陰関数定理と Lax-Milgram の定理の応用として展開する．それにより，[8] によるエネルギー解放率の領域積分表現が，パラメータによるエネルギーの 1 階 Fréchet 微分として見通しよく得られるとともに，より弱い条件への精密化・高階エネルギー微分への拡張が得られる．特に，[11] では，領域摂動 $t \to \varphi(t)$ が $C^2([0,T], W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$ のとき，エネルギー解放率の領域積分表現 (5) が証明されているが，ここでは，$C^1([0,T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$ のとき示されたことになり，従来の結果の改良になっている．
本講演は，[12] および [13] の結果に基づくものである．

## 2. パラメータ付き抽象的変分問題

本節では，Banach 空間における抽象的パラメータ付き変分問題の一般論を展開する．証明は省略し，結果のみ述べる．最小エネルギーのパラメータ微分については，次の定理が基本となる．

**定理 2.1.** $X$ と $M$ を実 Banach 空間とする．$X$ の部分集合 $\mathcal{U}_0$ と $M$ の開部分集合 $\mathcal{O}_0$ 上で定義された汎関数 $J : \mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0 \to \mathbb{R}$ を考える．各 $\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し，ある $u(\mu) \in \mathcal{U}_0$ があって $J(\cdot, \mu)$ の最小値 $J_*(\mu)$ を与えるものとする．すなわち，

$$J_*(\mu) := \min_{v \in \mathcal{U}_0} J(v, \mu) = J(u(\mu), \mu) \ (\mu \in \mathcal{O}_0).$$

ここで，$u \in C^0(\mathcal{O}_0, X)$ で，$J \in C^0(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0)$ かつ，任意の $v \in \mathcal{U}_0$ に対し $J(v, \cdot) \in C^1(\mathcal{O}_0)$ で，$\partial_M J \in C^0(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$ であるものと仮定すると，そのとき，$J_* \in C^1(\mathcal{O}_0)$ で，次が成り立つ．

$$(1) \qquad J_*'(\mu) = \partial_M J(u(\mu), \mu) \ (\mu \in \mathcal{O}_0).$$

更にもし，$\mathcal{U}_0$ も開集合で，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$\partial_M J \in C^k(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$ 及び $u \in C^k(\mathcal{O}_0, X)$ であるならば，$J_* \in C^{k+1}(\mathcal{O}_0)$ が成り立つ．

**注意 2.2.** もし $\mathcal{U}_0$ が開集合で，$J \in C^1(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0)$ 及び $u \in C^1(\mathcal{O}_0, X)$ であるとすると，公式 (1) は次のように簡単に得られる．

$$J_*'(\mu) = D_\mu[J(u(\mu), \mu)] = \partial_X J(u(\mu), \mu)[u'(\mu)] + \partial_M J(u(\mu), \mu) = \partial_M J(u(\mu), \mu),$$

ここで $D_\mu$ は，$\mu \in M$ に関する Fréchet 微分を表す．最後の等式は，最小値を与える $u(\mu)$ において，$J(\cdot, \mu)$ の第一変分 $\partial_X J(u(\mu), \mu) \in X'$ が 0 であることから従う．

次の定理は，$\partial_X J(u, \mu) = 0$ に対する陰関数定理と，Lax-Milgram の定理から従う．

**定理 2.3.** $X$ と $M$ を実 Banach 空間とし，$\mathcal{U}$, $\mathcal{O}$ をそれぞれ $X$, $M$ の開集合とする．$u_0 \in \mathcal{U}$ および $\mu_0 \in \mathcal{O}$ と汎関数 $J : \mathcal{U} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ について，次の条件を仮定する．

(1) $J(\cdot, \mu) \in C^2(\mathcal{U})$ $(\mu \in \mathcal{O})$ かつ $\partial_X J \in C^0(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$.
(2) $\partial_X J(u_0, \mu_0) = 0$.
(3) $\partial_X^2 J(w, \mu)$ は $(w, \mu) = (u_0, \mu_0)$ において連続.
(4) ある $\alpha > 0$ があって，$\partial_X^2 J(u_0, \mu_0)[w, w] \geq \alpha \|w\|_X^2$ $(w \in X)$ を満たす.

そのとき，$(u_0,\mu_0)$ の凸開近傍 $\mathcal{U}_0\times\mathcal{O}_0\subset\mathcal{U}\times\mathcal{O}$ と，$u\in C^0(\mathcal{O}_0,\mathcal{U}_0)$ が存在し，$\mu\in\mathcal{O}_0$ に対し，次の 3 つの条件は同値になる．

a. $J(\cdot,\mu)$ は $w\in\mathcal{U}_0$ において極小値を取る．
b. $w\in\mathcal{U}_0$ は $\partial_X J(w,\mu)=0$ を満たす．
c. $w=u(\mu)$.

更に，このとき，$J(\cdot,\mu)$ は $u(\mu)$ において $\mathcal{U}_0$ における最小値を取る．

**定理 2.4.** 定理 2.3 の条件のもとで，更に $\partial_X J\in C^k(\mathcal{U}\times\mathcal{O},X')$ がある $k\in\mathbb{N}$ について成り立つと仮定する．そのとき，$u\in C^k(\mathcal{O}_0,\mathcal{U}_0)$ である．

**定理 2.5.** 定理 2.3 の条件のもとで，更に，ある $k\in\mathbb{N}$ について $J\in C^k(\mathcal{U}\times\mathcal{O})$ であると仮定する． そのとき，$J_*\in C^k(\mathcal{O}_0)$ で，かつ (1) が成り立つ．

Lax-Milgram の定理から，定理 2.3 の条件のもとでは，$\partial_X^2 J(u(\mu),\mu)$ は $X$ から $X'$ への線形位相同型写像（すなわち，$X$ から $X'$ への全単射な有界線形作用素）とみなせることがわかるので，$\Lambda(\mu)\in B(X',X)$ をその逆写像として次をみたすように定義する．

$$\partial_X^2 J(u(\mu),\mu)[\Lambda(\mu)h,w]=h[w]\ ({}^\forall w\in X,\ {}^\forall h\in X').$$

この $\Lambda(\mu)$ は次節での楕円型偏微分方程式への応用においては，考えている境界条件のもとでの楕円型作用素の逆写像に相当する．

**定理 2.6.** 定理 2.4 で $k=1$ としたとき，

$$u'(\mu)=-\Lambda(\mu)h_0(\mu)\ (\mu\in\mathcal{O}_0), \tag{2}$$

が成り立つ．但し，$h_0(\mu):=\partial_M\partial_X J(u(\mu),\mu)\in B(M,X')$ である．

## 3. エネルギー最小化問題とエネルギー解放率

以下，$\mathbb{R}^n$ の有界凸領域 $\Omega_0$ $(n\geq 2)$ を一つ固定して，$W^{1,\infty}(\Omega_0,\mathbb{R}^n)\cong C^{0,1}(\overline{\Omega_0},\mathbb{R}^n)$ に属する領域写像 $\varphi$ について考える．また，$u\in W^{1,\infty}(\Omega_0,\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$|u|_{\mathrm{Lip},\Omega_0}:=\sup_{x,y\in\Omega_0,x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|},$$

とおく．ここで，$\overline{\Omega}\subset\Omega_0$ を満たす開集合 $\Omega$ を一つ固定する．$\varphi$ によるその変形 $\varphi(\Omega)$ を，以後 $\Omega(\varphi)$ と表すことにする．

$\mathbb{R}^n$ 上の恒等写像を $\varphi_0(x)=x$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ とおき，$W^{1,\infty}(\Omega_0,\mathbb{R}^n)$ の開部分集合

$$\mathcal{O}(\Omega):=\left\{\varphi\in W^{1,\infty}(\Omega_0,\mathbb{R}^n);\ |\varphi-\varphi_0|_{\mathrm{Lip},\Omega_0}<1,\ \overline{\Omega(\varphi)}\subset\Omega_0\right\},$$

を定義しておく．以下，$\varphi$ はこの $\mathcal{O}(\Omega)$ に属するものとする．縮小写像の原理から，$\varphi$ は $\Omega_0$ から $\varphi(\Omega_0)$ への bi-Lipschitz 変換になることがわかる．

また，$\Omega$ 上で定義された関数 $v$ に対し，$\Omega(\varphi)$ 上の関数を $\varphi_* v:=v\circ\varphi^{-1}$ によって定義する．この $\varphi_*$ はいわゆる，$\varphi$ に伴う押し出し作用素 (pushforward operator) である．$\varphi$ に伴う Jacobi 行列や Jacobi 行列式を

$$\nabla\varphi^T(x):=\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)\right)_{i\downarrow,j\rightarrow}\in\mathbb{R}^{n\times n},\ (x\in\Omega_0),$$

$$A(\varphi) := \left(\nabla\varphi^T\right)^{-1} \in L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^{n\times n}),\ \kappa(\varphi) := \det\nabla\varphi^T \in L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}),$$

と定義すると，$\Omega(\varphi)$ 上の微分や積分の $\Omega$ への引き戻しは，次のように表現される．

(1) $$[\nabla(\varphi_* v)]\circ\varphi = A(\varphi)\nabla v \text{ a.e in } \Omega\ (v \in W^{1,1}(\Omega)),$$

(2) $$\int_{\Omega(\varphi)} (\varphi_* v)(y)dy = \int_\Omega v(x)\ \kappa(\varphi)(x)\ dx\ (v \in L^1(\Omega))$$

$\varphi$ が $C^1$ 級の場合によく知られたこれらの公式は，Lipschitz 級の $\varphi$ についても成り立つ．例えば，[3] や [17] 等を参照のこと．

**命題 3.1.** 任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ に対し，次が成り立つ．

1. $\kappa \in C^\infty(W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n), L^\infty(\Omega_0))$ で，特に，$\kappa'(\varphi_0)[\mu] = \mathrm{div}\mu$ である．
2. $A \in C^\infty(\mathcal{O}(\Omega), L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^{n\times n}))$ で，特に，$A'(\varphi_0)[\mu] = -\nabla\mu^T$ である．

写像 $\varphi_*$ は $L^p(\Omega)$ から $L^p(\Omega(\varphi))$ への線形位相同型かつ，$W^{1,p}(\Omega)$ から $W^{1,p}(\Omega(\varphi))$ への線形位相同型になる．

記述の簡単のため，次の仮定をおく．より一般の状況への拡張性については，後の注意を参照のこと．$v \in H^1(\Omega(\varphi))$ を $\Omega(\varphi) \subset \mathbb{R}^n$ における状態を表す何らかのスカラー量とする．そのときの考えている系のエネルギーを

$$E(v, \Omega(\varphi)) := \int_{\Omega(\varphi)} W(x, v(x), \nabla v(x))dx,$$

とする．ここで，$W(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}$ は $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ について定義されたエネルギー密度関数とする．本稿では，煩雑さをさけるため，線形楕円型問題に対応する次の形に限ることとする（注意 3.3, 3.4 参照）．

(3) $$W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta^T B(\xi)\zeta + b(\xi)\eta^2\right) - f(\xi)\eta,$$

ここで，$B(\xi)$ は $n$ 次対称行列（$\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ と表す）で，$B \in C^k(\Omega_0, \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})$ かつ，ある $\beta_0 > 0$ があって，

$$\zeta^T B(\xi)\zeta \geq \beta_0|\zeta|^2\ ({}^\forall\xi \in \Omega_0,\ {}^\forall\zeta \in \mathbb{R}^n),$$

を満たすものとする．ここで，$k$ は 0 以上の整数とする．同様に，$b$ は $b \in W^{k,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R})$ かつ $b(\xi) \geq 0$ (${}^\forall\xi \in \Omega_0$) を満たし，$f$ は $f \in W^{k,2}(\Omega_0, \mathbb{R})$ を満たすものとする．このエネルギーの最小化問題は，形式的に次の楕円型方程式に対応する．

$$-\mathrm{div}(B(x)\nabla u) + b(x)u = f(x) \text{ in } \Omega(\varphi).$$

このエネルギーの最小化問題を，次のような非斉次 Dirichlet 境界条件と斉次 Neumann 境界条件をもつ混合境界条件のもとで考える．

まず，$\Gamma_D$ を摂動されていない領域 $\Omega$ の境界の空でない Lipschitz 連続な部分集合とする（いくつかの部分に分かれていても良い）．正確には有界なトレース作用素 $\gamma_0:\ H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_D)$ （但し，$R(\gamma_0) = \gamma_0(H^1(\Omega)) \neq \{0\}$ とする）が定義されていれば良い．$g \in H^1(\Omega)$ を一つ固定し，$v \in H^1(\Omega)$ に対する $\Gamma_D$ 上の非斉次 Dirichlet 境界条件 $\gamma_0(v - g) = 0$ を考える．また，$\Omega$ の境界の $\Gamma_D$ 以外の部分では，零 Neumann 境界条件（上記線形問題の場合は，$B\nabla u$ の法線成分が 0 に相当）が課されるものとする．

次に，摂動された領域 $\Omega(\varphi)$ における境界条件を述べる．$\Gamma_D$ に対応する境界を $\Gamma_D(\varphi) := \varphi(\Gamma_D)$ と書く．$H^1(\Omega(\varphi))$ から $L^2(\Gamma_D(\varphi))$ へのトレース作用素を $\gamma_\varphi$ とするとき，$v \in H^1(\Omega(\varphi))$ に対する $\Gamma_D(\varphi)$ 上の非斉次 Dirichlet 境界条件 $\gamma_\varphi(v - \varphi_* g) = 0$ を考える．また，$\Omega(\varphi)$ の境界の $\Gamma_D(\varphi)$ 以外の部分では，同様に零 Neumann 境界条件が課されるものとする．

対応する $H^1(\Omega(\varphi))$ のアフィン部分空間は次のようになる．

$$\begin{aligned} V(\varphi, g) &:= \{v \in H^1(\Omega(\varphi));\ \gamma_\varphi(v - \varphi_* g) = 0\} \\ &= \{v \in H^1(\Omega(\varphi));\ v = \varphi_* g \text{ on } \Gamma_D(\varphi)\}. \end{aligned}$$

ここで，$V(g) = V(\varphi_0, g) \subset H^1(\Omega)$ とおくとき，$\varphi_*(V(g)) = V(\varphi, g)$ であることに注意しておく．摂動された領域における，次のエネルギー最小化問題を考える．

**問題 3.2.** 上記の仮定のもとで，$V(\varphi, g)$ において $E(\cdot, \Omega(\varphi))$ を最小にする $u(\varphi) \in V(\varphi, g)$ を求めよ．すなわち，

$$E(u(\varphi), \Omega(\varphi)) \le E(v, \Omega(\varphi))\ ({}^\forall v \in V(\varphi, g)).$$

また，このとき，

$$E_*(\varphi) := \min_{v \in V(\varphi, g)} E(v, \Omega(\varphi)) = E(u(\varphi), \Omega(\varphi)),$$

と定義する．これは $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ をパラメータとするパラメータ付き変分問題とみなせる．

ここで，Ohtsuka [8] による定式化についていくつか注意を述べておく．

**注意 3.3.** 弾性体の亀裂問題では通常，空間次元 $n = 2$ または $3$ で，$n$ ベクトル値の変位場が状態を表す $v$ に対応するが，[8] ではスカラー値の場合とベクトル値の場合では，以下の議論に本質的な差はないことが示されている．そのため，本論文では煩雑さを避けるため，単独楕円型方程式の場合について記述することとしたが，もちろん以下の結果は弾性体方程式を含むベクトル値の場合に容易に拡張可能である．

**注意 3.4.** [8] で扱われているように，$W$ は必ずしも (3) のような線形問題に対応している必要はなく，半線形などある種の弱い非線形問題にも以下の議論は適用可能である．大雑把に言って，$H^1$ の枠組みで取り扱える非線形性ならば大丈夫だが，そのような $W$ の満たすべき仮定をすべて書き連ねることは本稿では避け，[8] の取り扱いを参考に挙げるにとどめる．

**注意 3.5.** エネルギー解放率の計算において必要な仮想亀裂進展は，本論文の枠組みでは次のように取り扱われる．$\Omega_*$ を亀裂の入っていない領域とし，そこに初期亀裂 $\Sigma \subset \overline{\Omega_*}$ が入った領域を $\Omega := \Omega_* \setminus \Sigma$ とする．$0 \le t < T$ をパラメータとする滑らかな仮想亀裂進展 $\Sigma(t)$ を考える．ここで，$\Sigma(t)$ は閉集合とし，

$$\Sigma = \Sigma(0) \subset \Sigma(t_1) \subset \Sigma(t_2)\ (0 \le^\forall t_1 \le^\forall t_2 < T),$$

である．$\varphi(t) \in \mathcal{O}(\Omega)$ を $\varphi(0) = \varphi_0$，$\varphi(t)(\Sigma) = \Sigma(t)$ かつ $\partial\Omega_*$ の近傍では $\varphi(t)(x) = x$ となるように取る．パラメータ $t$ として特に，$t = \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma(t) \setminus \Sigma)$ となるように選ぶ．ここで，$\mathcal{H}^{n-1}$ は $n-1$ 次元 Hausdorff 測度を表す．仮想亀裂進展 $\{\Sigma(t)\}_{0 \le t < T}$ に伴う，$t = 0$ におけるエネルギー解放率 $G$ は，$E_*$ の $\varphi$ に関する Fréchet 微分 $E'_*$ を用いて，

$$G = E'_*(\varphi_0)[\dot\varphi(0)],$$

で与えられる．ここで，$\dot\varphi$ は $t$ 微分を表し，$\dot\varphi(0) \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ の台は亀裂先端部の小さな近傍に含まれるように出来る．そのような $\varphi(t)$ の構成については，やはり [8] を参照のこと．すなわち，エネルギー解放率を求めることは，$E_*$ の Fréchet 微分 $E'_*(\varphi_0)$ を求めることに帰着される．

**注意 3.6.** また，[8] ではそこで提案されている枠組みが，亀裂進展問題だけではなく，他の領域変形や混合境界条件の摂動などへ，様々な応用を持つことが指摘されているが，それらの指摘は本稿へも直接当てはまる．

以下，$W$ の $\xi$, $\eta$, $\zeta$ に関する微分をそれぞれ $\nabla_\xi W = (\frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial \xi_n})^T$, $W_\eta = \frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\nabla_\zeta W = (\frac{\partial W}{\partial \zeta_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial \zeta_n})^T$ と書く．更に，記述の簡略化のために，
$W(v(x)) = W(x, v(x), \nabla v(x))$,
$\nabla_\xi W(v(x)) = \nabla_\xi W(x, v(x), \nabla v(x))$ などと省略して表すこととする．今，

$$E_*(\varphi) = \min_{v \in V(\varphi, g)} E(v, \Omega(\varphi)) = \min_{v \in V(g)} E(\varphi_* v, \Omega(\varphi)) = \min_{w \in V(0)} E(\varphi_*(w+g), \Omega(\varphi)),$$

であることに注意する．$\mathcal{E}(w, \varphi) := E(\varphi_*(w+g), \Omega(\varphi))$ 及び $\mathcal{E}_*(\varphi) := \min_{w \in V(0)} \mathcal{E}(w, \varphi)$ とおくと，$\mathcal{E}_*(\varphi) = E_*(\varphi)$ である．また，変数変換公式から，

$$\begin{aligned} E(\varphi_* v, \Omega(\varphi)) &= \int_{\Omega(\varphi)} W(y,\ \varphi_* v(y),\ \nabla_y(\varphi_* v)(y)) dy \\ &= \int_\Omega W(\varphi(x),\ v(x),\ [A(\varphi)(x)] \nabla v(x)) \kappa(\varphi)(x) dx, \end{aligned} \tag{4}$$

であることがわかる．2 節で考えたパラメータ付き抽象的変分問題の枠組みを $X = V(0)$ 及び $M = W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ として，$J = \mathcal{E}$ に適用できる．例えば定理 2.1 が適用出来たとすると，公式 (1) は次の形になる．$u = u(\varphi_0)$ とおくと，任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\begin{aligned} E_*'(\varphi_0)[\mu] &= \mathcal{E}_*'(\varphi_0)[\mu] = \mathcal{E}_\varphi(u - g, \varphi_0)[\mu] \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{E}(u - g, \varphi_0 + \varepsilon\mu) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} E((\varphi_0 + \varepsilon\mu)_* u, \Omega(\varphi_0 + \varepsilon\mu)) \Big|_{\varepsilon=0}, \end{aligned}$$

である．こうして，(4) より，$E_*'(\varphi_0)$ は，任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対し，

$$E_*'(\varphi_0)[\mu] = \int_\Omega \left( \nabla_\xi W(u) \cdot \mu - (\nabla_\zeta W(u))^T (\nabla \mu^T) \nabla u + W(u) \mathrm{div}\mu \right) dx, \tag{5}$$

と，領域積分によって表現される．この公式は，[8] によって得られたエネルギー解放率の領域積分表現と全く同じものである．
特に線形の場合，(3) とその後に述べた仮定から，定理 2.5 が適用でき，次の定理が得られる．

**定理 3.7.** $W$ が (3) で与えられるとき，$k \in \mathbb{N}$ ならば，$\mathcal{E} \in C^k(V(0) \times \mathcal{O}(\Omega))$ 及び $E_* \in C^k(\mathcal{O}(\Omega))$ で公式 (5) が成り立つ．

## References


[1] Berger, M. S., Nonlinearity and Functional Analysis. Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis, Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York-London, 1977.
[2] Cherepanov, G. P., On Crack propagation in continuous media, Prikl. Math. Mekh. Vol.31, No.3 (1967), 476-493.
[3] Evans, L. C. and Gariepy, R. F., Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
[4] Francfort, G. A. and Marigo, J.-J., Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, J. Mech. Phys. Solids, Vol.46 (1998), 1319-1342.
[5] Griffith, A. A., The phenomenon of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Royal Soc. London, A221 (1920), 163-198.
[6] Henry, D., Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer Verlag, 1981.
[7] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics I, Hiroshima Math. J., Vol.11 (1981), 21-52.

[8] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and its applications I – Basic theory –, Japan J. Appl. Math. Vol.2, No.2 (1985), 329-350.
[9] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics II, Hiroshima Math. J., Vol.16 (1986), 327-352.
[10] 大塚厚二, J 積分の一般化とその応用, 応用力学論文集, Vol.1, 土木学会, (1998), 35-44.
[11] Ohtsuka, K. and Khludnev, A., Generalized J-integral method for sensitivity analysis of static shape design, Control & Cybernetics, Vol.29 (2000), 513-533.
[12] 木村正人，若野功，亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析に関する再考察，日本応用数理学会論文誌, (to appear).
[13] Kimura, M. and Wakano, I., Parameter variation formulas and application to the energy release rate in crack extension, (in preparation).
[14] Rice, J. R., A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., Vol.35 (1968), 379-386.
[15] Wakano, I., Analysis for stress intensity factors in two dimensional elastisity, Proc. Japan Acad., Vol.73, Ser.A, No.5 (1997), 86-88.
[16] 若野 功, 二次元曲線亀裂の数学解析と数値解析, 日本応用数理学会論文誌, Vol.13, No.1 (2003), 59-80.
[17] W. P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions, Sobolev spaces and functions of bounded variation, Graduate Texts in Mathematics, 120, Springer-Verlag, New York (1989).

〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1
*E-mail address*: `masato@math.kyushu-u.ac.jp`

# 一般講演（33件）

# 楕円–放物型変分不等式に対する最適制御問題について

山崎 教昭 (室蘭工業大学 工学部)

## §1 Introduction

本研究は，K.-H. Hoffmann 氏（Technische Universität München）と久保雅弘 氏（名古屋工業大学 工学部）との共同研究である。

時間依存制約をもつ楕円–放物型変分問題を考察する：

**Problem (P;$f$)** Find a function $u : [0,T] \to H^1(\Omega)$ satisfying the following:

(a) $u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ and $b(u) \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$.

(b) $u \in K(t)$ for a.e. $t \in (0,T)$.

(c) For a.e. $t \in (0,T)$, the following inequality holds:

$$(b(u)_t, u-v) + \int_\Omega a(x,b(u),\nabla u)\cdot\nabla(u-v)dx \le (f(t),u-v) \tag{1}$$

for all $v \in K(t)$.

(d) $b(u(0)) = b_0$ in $L^2(\Omega)$.

ここで, $T$ は正定数であり，$\Omega$ は $\mathbb{R}^N$ $(N \ge 1)$ の有界部分領域である．$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は与えられた非減少関数である．$a(x,s,p)$ は quasi–linear elliptic vector field であり，特に

$$a(x,s,p) = \partial_p A(x,s,p)$$

となる potential function $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が存在するとする．$(\cdot,\cdot)$ は $L^2(\Omega)$-内積である．時間依存制約 $K(t)$ は $H^1(\Omega)$ の凸部分集合であり，$f(t,x)$ は $(0,T)\times\Omega$ 上の与えられた関数とする．また，$b_0$ は与えられた初期値である．

変分不等式 (1) は， 領域 $\{b'(u) = 0\}$ において楕円型であり，領域 $\{b'(u) > 0\}$ において放物型である．従って，(1) は 楕円–放物型変分不等式と呼ばれ，ダムなど porous media 内の水の浸透を記述するモデルの弱形式としてあらわれる (cf [1]).

本講演では，時間依存制約をもつ楕円–放物型変分問題 (P;$f$) の最適制御問題を考察する．つまり，次の問題を考える：

**Problem (OP;$f$):** Find the optimal control $f^* \in F$ such that

$$J(f^*) = \inf_{f\in F} J(f).$$

ここで，$J(f)$ は

$$J(f) := \frac{1}{2}\int_0^T |b(u)-b_d|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f|^2_{H^1(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f_t|^2_{L^2(\Omega)}dt$$

と定義されたコスト関数である．$f$ は制御コントロール，$b(u)$ は状態問題 (P;$f$) の解であり，$b_d$ は $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ の与えられた目標である．また，$F$ は

$$F := \{f \in L^2(0,T;H^1(\Omega)); f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$$

と定義されたコントロール空間である．

## §2 主定理

次を仮定する：

(A1) $a(x,s,p) = \partial_p A(x,s,p)$ for some potential function $A(x,s,p)$. There exist constants $\mu > 0$, $C_1 = C_1(a) > 0$ and $C_2 = C_2(a) > 0$ such that

$$[a(x,s,p) - a(x,s,\hat{p})] \cdot (p - \hat{p}) \geq \mu |p - \hat{p}|^2,$$
$$|a(x,s,p)|^2 + |A(x,s,p)| + |\partial_s A(x,s,p)|^2 \leq C_1(1 + |s|^2 + |p|^2),$$
$$|a(x,s,p) - a(x,\hat{s},p)| \leq C_2(1 + |p|)|s - \hat{s}|$$

for all $x \in \Omega$, $s$, $\hat{s} \in \mathbb{R}$, $p$, $\hat{p} \in \mathbb{R}^N$. Moreover, $a(\cdot,\cdot,\cdot)$ and $A(\cdot,\cdot,\cdot)$ satisfy the Caratheodory condition.

(A2) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is bounded, nondecreasing and Lipschitz continuous.

(A3) $K(t)$ is a non-empty, closed and convex set in $H^1(\Omega)$ for all $t \in [0,T]$.

(A4) For any $z, \overline{z} \in K(t)$ and $w, \overline{w} \in H^1(\Omega)$ with $w \leq z$, $\overline{z} \leq \overline{w}$, we have

$$w \vee \overline{z},\ z \wedge \overline{w} \in K(t),$$

where $u \vee v := \max\{u,v\}$, $u \wedge v := \min\{u,v\}$.

(A5) There is a function $\alpha \in W^{1,2}(0,T)$ satisfying the following property $(\star)$:

$(\star)$ : For any $0 \leq s < t \leq T$, $w \in H^1(\Omega)$ with $|w(x)| \leq |b|_\infty$ a.e. in $\Omega$ and $z \in K(s)$ there exists $\tilde{z} \in K(t)$ such that

$$|\tilde{z} - z|_{L^2(\Omega)} \leq |\alpha(t) - \alpha(s)|(1 + |z|_{H^1(\Omega)})$$

and

$$\int_\Omega A(x, w(x), \nabla \tilde{z}(x))dx - \int_\Omega A(x, w(x), \nabla z(x))dx$$
$$\leq |\alpha(t) - \alpha(s)|(1 + |z|^2_{H^1(\Omega)} + |w|_{H^1(\Omega)}|z|_{H^1(\Omega)}).$$

(A6) There is a constant $C_3 = C_3(K) > 0$ such that

$$|z|_{H^1(\Omega)} \leq C_3(1 + |\nabla z|_{L^2(\Omega)}) \qquad \text{for all } z \in K(t) \text{ and } t \in [0,T].$$

(A7) If $z$, $\overline{z} \in K(t)$ and $\nabla[z - \overline{z}]^+ \equiv 0$, then $z \leq \overline{z}$.

このとき，次の定理を得た。

**主定理** (Existence of optimal control)
*Assume* (A1)–(A7) *are satisfied, and let* $b_0 = b(u_0)$ *for some* $u_0 \in K(0)$. *Let* $b_d$ *be an element in* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. *Then, there exists at least one optimal control* $f^* \in F$ *such that*

$$J(f^*) = \inf_{f \in F} J(f).$$

### References


[1] H. W. Alt and S. Luckhaus, Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, *Math. Z.,* **183**, 311–341 (1983).

[2] N. Kenmochi and I. Pawlow, Parabolic-elliptic free boundary problems with time-dependent obstacles, *Japan J. Appl. Math.,* **5**, 87–121 (1988).

[3] K.-H. Hoffmann, M. Kubo and N. Yamazaki, Optimal control problems for elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints, *Numerical Functional Analysis and Optimization,* **27**(2006), 329–356.



〒050-8585 北海道室蘭市水元町 27-1 室蘭工業大学 共通講座
*E-mail address*: noriaki@mmm.muroran-it.ac.jp

# IDENTIFICATION OF THE ABSENT SPECTRAL GAPS IN A CLASS OF GENERALIZED KRONIG-PENNEY HAMILTONIANS

HIROAKI NIIKUNI
(DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY)

In this talk we study the spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with particular periodic point interactions. We fix $\kappa \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$. Let

$$\Gamma_1 = 2\pi\mathbf{Z}, \quad \Gamma_2 = \{\kappa\} + 2\pi\mathbf{Z}, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

For $\theta_1, \theta_2 \in [-\pi/2, \pi/2)$ and $A_1, A_2 \in SO(2)\backslash\{\pm I\}$, we define the operator $H = H(\theta_1,\theta_2,A_1,A_2)$ in $L^2(\mathbf{R})$ as follows.

$$(Hy)(x) = -\frac{d^2}{dx^2}y(x), \quad x \in \mathbf{R}\setminus\Gamma,$$

$$\mathrm{Dom}(H) = \left\{ y \in H^2(\mathbf{R}\setminus\Gamma) \;\middle|\; \begin{pmatrix} y(x+0) \\ y'(x+0) \end{pmatrix} = e^{i\theta_j}A_j \begin{pmatrix} y(x-0) \\ y'(x-0) \end{pmatrix}, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1,2 \right\}.$$

Since $A_j \in SO(2)\setminus\{\pm I\}$, we can write the elements of $A_j$ as

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix}, \quad \alpha_j \in (-\pi,0)\cup(0,\pi).$$

The operator $H$ is self-adjoint. Since the set $\sigma(H(\theta_1,\theta_2,A_1,A_2))$ is independent of $\theta_1$ and $\theta_2$, we hereafter discuss only the case where

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.$$

Next, we define the spectral gaps of $H$. To this end, we consider the equation

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} -y''(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda), \quad x \in \mathbf{R}\setminus\Gamma \\ \\ \begin{pmatrix} y(x+0,\lambda) \\ y'(x+0,\lambda) \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} y(x-0,\lambda) \\ y'(x-0,\lambda) \end{pmatrix} \text{ for } x \in \Gamma_j, \;\; j = 1,2, \end{cases}$$

where $\lambda$ is a real parameter. This equation has two solutions $y_1(x,\lambda)$ and $y_2(x,\lambda)$ which are uniquely determined by the initial conditions

$$y_1(+0,\lambda) = 1, \quad y_1'(+0,\lambda) = 0,$$

and

$$y_2(+0,\lambda) = 0, \quad y_2'(+0,\lambda) = 1,$$

respectively. We introduce the discriminant $D(\lambda)$ of the equation (1):

$$\text{(2)} \qquad D(\lambda) = y_1(2\pi+0,\lambda) + y_2'(2\pi+0,\lambda).$$

Let $\lambda_j$ be the $(j+1)$st zero of $D(\cdot)^2 - 4$. Then we have

$$\lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_3 \le \lambda_4 < \cdots < \lambda_{2k-1} \le \lambda_{2k} < \cdots \to \infty.$$

We define

$$B_j = [\lambda_{2j-2}, \lambda_{2j-1}], \quad G_j = (\lambda_{2j-1}, \lambda_{2j}).$$

Then we derive

$$\sigma(H) = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

The open interval $G_j$ is called the $j$-th gap of the spectrum of $H$, the closed interval $B_j$ the $j$-th band. The aim of this study is to determine whether or not the $j$-th gap is absent for a given $j \in \mathbf{N}$. Throughout this talk we use the notations

$$a \equiv b \text{ if } a - b \in \pi\mathbf{Z}, \qquad a \not\equiv b \text{ if } a - b \notin \pi\mathbf{Z}$$

for $a$, $b \in \mathbf{R}$. For convenience we adopt the following classification of the parameters $\alpha_1$ and $\alpha_2$.

(I) $\alpha_1 - \alpha_2 \not\equiv 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \not\equiv 0.$

(II) $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0.$

(III) $\alpha_1 - \alpha_2 \equiv 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \not\equiv 0.$

Our main results are the following three theorems.

Theorem 1. *If the condition* (I) *holds, then*

$$G_j \neq \emptyset \quad \text{for all} \quad j \in \mathbf{N}.$$

Theorem 2. *Suppose that* (II) *is valid.*
(1) *Let* $\kappa/\pi \notin \mathbf{Q}$. *Then we have*

$$\{j \in \mathbf{N} | \quad G_j = \emptyset\} = \{3\}.$$

(2) *If* $\kappa/2\pi = q/p$, $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, $\gcd(p, q) = 1$, *then*

$$\{j \in \mathbf{N} | \quad G_j = \emptyset\} = \{3\} \cup \{pk + 1 \ | \ k \in \mathbf{N}\}.$$

Theorem 3. *Assume that* (III) *is valid. We put* $\eta_j = \pi^2 j^2/4(\pi - \kappa)^2$ *for* $j \in \mathbf{N}$. *Then it holds that*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \cap B_{k+1} = \left\{\eta_j \middle| -2\left(\sqrt{\eta_j} + \frac{1}{\sqrt{\eta_j}}\right)^{-1} \cot \kappa\sqrt{\eta_j} = \tan \alpha_1 \text{ and } j \in \mathbf{N}\right\}.$$

## References


[1] Chernoff, R. P., and Hughes, J. R., A new class of point interactions in one dimension, J. Funct. Anal., **111**(1993), pp. 97–117.

[2] Gan, S. and Zhang, M., Resonance pockets of Hill's equations with two-step potentials, SIAM J. Math. Anal., **32**(2000), No.3, pp.651–664.

[3] Gesztesy, F., Holden, H., and, Kirsch, W., On energy gaps in a new type of analytically solvable model in quantum mechanics, J. Math. Anal. Appl. **222** (1988), pp. 9–29.

[4] Gesztesy, F., and Kirsch, W., One-dimensional Schrödinger operators with interactions singular on a disctete set, J. Reine Angew. Math., **362** (1985), pp. 28–50.

[5] Hughes, R. J., Generalized Kronig-Penney Hamiltonians, J. Math. Anal. Appl., **222** (1998), no.1, pp. 151-166.

[6] Kronig, R., and Penney, W., Quantum mechanics in crystal lattices, Proc. Royal. Soc. London, **130** (1931), pp. 499–513.

[7] Šeba, P., The generalized point interaction in one dimension, Czech J. Phys. B **36** (1986), pp. 667–673.

[8] Yoshitomi, K., Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with periodic point interactions, to appear in Hokkaido Math. J.

# LIFE SPAN OF SOLUTIONS OF SUPERLINEAR HEAT EQUATION

佐藤 翔大　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)

本講演では、次の半線型熱方程式の初期値-境界値問題

$$
\text{(P)}\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) & in \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & on \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \rho\varphi(x) & in \quad \Omega \end{cases}
$$

を考える．ここで、$\Omega$ は $R^N$ のなめらかな有界領域、$\rho > 0$ はパラメーター、$\varphi(x)$ は $\overline{\Omega}$ 上の非負連続関数、$f(u)$ は $[0,\infty)$ 上の非負連続関数である．この問題に対し、解の life span の $\rho \to \infty$ における漸近挙動を考える．ここで、解の life span とは、古典解での最大存在区間、すなわち、初めて爆発する時間とする．

常微分方程式の life span と異なり、一般に、偏微分方程式の life span は陽に求めることは困難である．そこで本論文では、初期値が大きいという条件下でその挙動を考える．以下では、$\rho$ を十分大きなパラメーターとし、(P) の解の life span を $T(\rho)$ と表す．

非線型項 $f(u)$ および初期値 $\varphi(x)$ に対しては、

$$
\text{(A)}\begin{cases} \varphi(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ M \overset{\text{def}}{=} \max_{x\in\bar{\Omega}} \varphi(x) > 0,\ \varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ f(u) \in C^2((0,\infty)) \cap C([0,\infty)),\ f(u),\ f'(u),\ f''(u) > 0\ for\ \forall u > 0, \\ \int_1^\infty \frac{1}{f(u)} du < \infty \end{cases}
$$

を仮定し、また、

$$
F(u) := \int_u^\infty \frac{1}{f(z)} dz
$$

と定める．

仮定 $(A)$ より、$\lim_{u\to\infty} f(u)/u = \infty$ が成り立つので、$\rho \to \infty$ とすると、

$$
u_t(x,0) = \rho\Delta\varphi(x) + f(\rho\varphi(x))
$$

において、$\rho\Delta\varphi(x)$ に比べて $f(\rho\varphi(x))$ が大きくなる．従って、$\rho$ が大きいとき、拡散項より非線型項が強くなると考えられる．これを踏まえると、拡散項を消去した常微分方程式 $z_t = f(z)\ (t > 0), z(0) = M$ の解の life span $F(\rho M)$ が大きく関係すると考えられる．実際、$T(\rho)$ について次のことが成り立つ．

**定理 1.** $f(u),\ \varphi(x)$ が $(A)$ を満たすとする．このとき、

$$
T(\rho) = F(\rho M) + o(F(\rho M))\ as\ \rho \to \infty
$$

となる．

これは、(P) の解の life span が $\rho \to \infty$ のとき、常微分方程式 $z_t = f(z)\ (t > 0), z(0) = M$ の解の life span $F(\rho M)$ に近づくことを示している．言い換えれば、$\rho$ が十分大きいとき、life span に対して、非線型項 $f(u)$ と比べて拡散の効果が小さくなり、拡散の効果は漸近展開の高次の項として現れると考えられる．実際、次の結果が成立する．

**定理 2.** $f(u),\ \varphi(x)$ が $(A)$ を満たすとする．$\varphi(x)$ が有限個の点でのみ最大となり、すべての最大点 $a \in \Omega$ に対して、

$$
(D^2\varphi(a)x, x) < 0\ for\ \forall x \in R^N
$$

を満たし、$f(u)$ が任意の $\beta > 0$ に対して、

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u^{1+\beta} f'(u)}{f(u)^{1+\beta}} = 0$$

を満たし、ある $\alpha > 2$ が存在して、十分大きな $u$ に対して、

$$\frac{d}{du}\Big(\frac{f(u)}{u \log u^{\alpha}}\Big) \geq 0$$

が成り立つとする. このとき、

$$T(\rho) = F(\rho M) + \min_{\varphi(a)=M} |\Delta\varphi(a)| \rho f(\rho M)^{-1} F(\rho M) \\ + o(\rho f(\rho M)^{-1} F(\rho M)) \quad as \quad \rho \to \infty$$

となる.

このように、第2項に $|\Delta\varphi(a)|$ が現れており、拡散の効果が $\rho \to \infty$ の life span $T(\rho)$ に影響していることがわかる.

次に、$\varphi(x)$ の peak が平坦な場合を考えると、高次項はより小さくなる.

**定理 3.** $f(u),\ \varphi(x)$ が $(A)$ を満たし、ある $a \in \Omega, d > 0$ に対して、

$$\varphi(x) \equiv M \ on \ \{x \in R^n; |x-a| \leq d\} \subset \Omega$$

を満たすとする. このとき、ある定数 $C > 0$ を用いて、

$$T(\rho) = F(\rho M) + o(\exp(-CF(\rho M)^{-1})) \ as \ \rho \to \infty$$

となる.

以上の結果を証明するために、supersolution と subsolution を構成して、それらの life span を評価する. すると、比較原理により、$T(\rho)$ は supersolution の life span により下から、subsolution の life span により上から抑えられる. 定理の証明に必要な supersolution と subsolution の構成は、非線型項が $u^p$ である半線型熱方程式の life span に関する論文 [1],[2] の手法を一般化し、拡散項を消去した常微分方程式の解と非線型項を消去した熱方程式の解を用いる.

## References

[1] N. Mizoguchi and E. Yanagida, *Life Span of Solutions with Large Initial Data in a Semilinear Prabolic Equation*, Indiana Univ. Math. J. 50, no. 1, (2001), P591–610

[2] N. Mizoguchi and E. Yanagida, *Life Span of Solutions for a Semilinear Parabolic Problem with Small Diffusion*, J. Math. Anal. Appl. 261, 350–368 (2001)

# リーマンゼータ関数，ベルヌーイ多項式とソボレフ不等式の最良定数

亀高 惟倫，山岸 弘幸 (阪大基礎工 D3)，渡辺 宏太郎 (防衛大)，
永井 敦 (日大生産工)，武村 一雄 (東京工科大)

リーマンゼータ関数 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ $(\mathrm{Re}\, z > 1)$ の偶数における値 $\zeta(2M)$ $(M = 1, 2, 3, \cdots)$ の変分学的な意味付けを行った．

**定理**

$$H_M = \left\{ u(x) \,\middle|\, u^{(M)}(x) \in L^2(0,1), \right.$$
$$\left. u^{(i)}(1) - u^{(i)}(0) = 0 \quad (0 \le i \le M-1), \quad \int_0^1 u(x)dx = 0 \right\}$$

に属する任意の関数 $u(x)$ に対し，$u(x)$ によらない正定数 $C$ があって，ソボレフ不等式

$$\left( \sup_{0 \le y \le 1} |\, u(y) \,| \right)^2 \le C \int_0^1 \left|\, u^{(M)}(x) \,\right|^2 dx$$

が成り立つ．$C$ のうち最良のものは

$$C_M = \frac{2\,\zeta(2M)}{(2\pi)^{2M}} = \frac{B_M}{(2M)!}$$

である．ここで $B_M$ はベルヌーイ数である．
上の不等式で $C$ を $C_M$ でおきかえるとき，$0 \le y \le 1$ なる任意の $y$ と，任意の複素数 $c$ に対し，$u(x) = c\, b_{2M}(\,|x-y|\,)$ に対して等号が成り立つ．$b_i(x)$ は $i$ 次ベルヌーイ多項式である．

ベルヌーイ多項式 $b_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ は

$$\begin{cases} b_0(x) = 1 \\ b_i'(x) = b_{i-1}(x), \quad \displaystyle\int_0^1 b_i(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

によって定められる．

$$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, \quad \cdots$$

である．

可解条件 $\int_0^1 f(y)\,dy \;=\; 0$ をみたす区間 $0 < x < 1$ 上の任意の有界連続関数 $f(x)$ に対して，境界値問題

BVP

$$\begin{cases} (-1)^M u^{(2M)} \;=\; f(x) & (0 < x < 1) \\ u^{(i)}(1) - u^{(i)}(0) \;=\; 0 & (0 \le i \le 2M-1) \\ \displaystyle\int_0^1 u(x)dx \;=\; 0 \end{cases}$$

は唯一つの解をもち，解 $u(x)$ はグリーン関数 $G(x,y)$ によって

$$u(x) \;=\; \int_0^1 G(x,y)\,f(y)\,dy \qquad (0 < x < 1)$$

と表示される．

$$G(x,y) \;=\; (-1)^{M-1}\,b_{2M}(|x-y|) \;=\; 2\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi n)^{-2M}\cos(\,2\pi n(x-y)\,)$$

$$(0 < x, y < 1)$$

である．とくに

$$G(y,y) \;=\; (-1)^{M-1}\,b_{2M}(0) \;=\; 2\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi n)^{-2M} \;=\; \frac{2}{(2\pi)^{2M}}\,\zeta(2M)$$

である．

関数空間 $H_M$ に対して

$$(u,v)_M \;=\; \int_0^1 u^{(M)}(x)\,\overline{v}^{(M)}(x)\,dx$$

は内積となり，$H_M$ はこの内積によりヒルベルト空間となる．$G(x,y)$ はヒルベルト空間 $H_M$ と内積 $(\cdot,\cdot)_M$ に関し，再生核である．すなわち，任意の $u(x) \in H_M$ に対して

$$\int_0^1 u^{(M)}(x)\,\partial_x^M G(x,y)\,dx \;=\; u(y) \qquad (0 < y < 1)$$

が成り立つ．

## References


[1] Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai and S. Pyatkov *The best constant of Sobolev inequality in an n dimensional Euclidean space* , Scientiae Mathematicae Japonicae Online, **e-2004** (2004) pp. 295-303

[2] K. Watanabe, T. Yamada and W. Takahashi, *Reproducing Kernels of* $H^m(a,b)$ $(m = 1,2,3)$ *and Least Constants in Sobolev's Inequalities*, Applicable Analysis **82** (2003) pp. 809–820.

[3] Y. Kametaka, K. Takemura, Y. Suzuki and A. Nagai, *Positivity and hierarchical structure of Green's functions of 2-point boundary value problems for bending of a beam* , Japan J. Ind. Appl. Math. **18** (2001) pp. 543-566



〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3 阪大基礎工数理教室

*E-mail address*: `yamagisi@sigmath.es.osaka-u.ac.jp`

# 拡散項を伴う３種 POPULATION MODEL の解析について

大屋 博一 (早稲田大学 理工学部)

本講演では、関岡直樹氏 (早稲田大学大学院理工学研究科) の修士論文における結果を紹介する。

次の 3 種 population model(P) に対する正値解の存在や安定性を議論する。

$$
\text{(P)}\begin{cases}
u_t = \Delta u + u(1-u-kv) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty),\\
v_t = \Delta v + v(1-lu-v+mw) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty),\\
w_t = \Delta w + dw(1-nv-w) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial\nu} = \dfrac{\partial w}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty),\\
u(\cdot,0)=u_0(\cdot)\ge 0, v(\cdot,0)=v_0(\cdot)\ge 0, w(\cdot,0)=w_0(\cdot)\ge 0.
\end{cases}
$$

ここで $d$, $k$, $l$, $m$, $n$ は全て正定数とする。また $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ は境界が滑らかな有界領域とする。3 種の生物の役割を表す反応項について、種 $w$ は種 $v$ との関係が捕食者—被捕食者の関係になる反面、種 $u$ との直接の関係はないように反応項を選んでいることに注意する。問題 (P) において、$w\equiv 0$ と置くと $u$, $v$ の競争する 2 種によるシステムに帰着され、係数 (ここでは $k$ と $l$ がそれに対応する) の大小関係により種の共存あるいは絶滅などを分類することが出来る。さらに問題によっては安定多様体や不安定多様体なども構成でき、より詳しい解の挙動を考察することが出来る。このように、2 種の生物種に対する数理モデルに関してはより多くの研究により詳細な解構造が示されている。このような 2 種の生物種モデルに第 3 種目を加えることにより、その第 3 種目の効果が解構造に対しどのように影響を及ぼすのかを考察することは自然なことであり、また重要なことである。本講演では特に問題 (P) の正値定数定常解

$$\hat{u}_p := (\hat{u},\hat{v},\hat{w}) = \left(\frac{1+mn-k-km}{1+mn-kl}, \frac{1-l+m}{1+mn-kl}, \frac{1+nl-kl-n}{1+mn-kl}\right)$$

からの非定数正値解の分岐について考えていきたい。具体的なテーマとしては問題 (P) の第 3 式にある係数 $d$ をパラメータと見たときの正値定数定常解の安定性、および正値定数定常解からの Hopf 分岐などについて述べていきたい。

まずはじめに問題 (P) の正値定数定常解が存在するための条件は $m > l-1$, $n > k$, $kl < 1+n(l-1)$ である。この条件は大雑把に考えると 3 種の種間の影響力について、$w$ が $v$ に及ぼす効果が $u$ が $v$ に及ぼす効果よりも強いが $w$ は $v$ によって強く増加を抑えられている、という状況に対応すると考えてよい。ここで定理を述べる前にいくつか記号を導入する。

まず、$0=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2\cdots$ を同次ノイマン境界条件の下での $-\Delta$ の固有値とし、すべて単純であると仮定する。これを用いて $d_i^*$, $d_j^{**}$ $(i,j=1,2,\cdots)$ を次のように定義する。

$$d_i^* = \frac{-S_2+\sqrt{S_2^2-4S_1S_3}}{2S_1},\ \ d_j^{**} = \frac{-\alpha_i^3-\alpha_i^2(\hat{u}-\hat{v})+\alpha_i(kl-1)}{\hat{w}[\alpha_i^2+\alpha_i\{\hat{u}+\hat{v}(1+mn)\}+\hat{u}\hat{v}(1+mn-kl)]}.$$

ただし $A=\alpha_i+\hat{u},\ B=\alpha_i+\hat{v}$ として

$$S_1=\hat{w}^2(A+B+mn\hat{v}),\quad S_2=\hat{w}\{\alpha_i(2A+2B+mn\hat{v})+(A+B)^2+Bmn\hat{v}\},$$
$$S_3=(A+B)(AB-kl\hat{u}\hat{v})+2\alpha_i(AB-kl\hat{u}\hat{v})+\alpha_i^2(A+B).$$

ここで $\alpha_i$ の単調性から $d_i^*>0,\ d_j^{**}>0$ を満たす $i,\ j$ はそれぞれ有限個であることが確認できる。このことを踏まえ $d^*=\max\{\{d_i^*\}_i,\{d_j^{**}\}_j\}<+\infty$ として定義し、$d_i^*,\ d_j^{**}$ は重複または一致しないものと仮定すると次の定理が成り立つ。

**Theorem 1 (正値定数定常解 $\hat{\mathbf{u}}_p$ の安定性).**
(a) $1>kl$ の場合 $\hat{\mathbf{u}}_p$ は $d>0$ で安定である。
(b) $1<kl$ の場合 $\hat{\mathbf{u}}_p$ は $d>d^*$ で安定であり、$0<d<d^*$ で不安定である。

上記の定理において、(a) の場合は $u$ または $v$ の効果が支配的となり、また (b) の場合は特に $d>0$ の値が大きければ $w$ の効果が支配的となりそれぞれ定数定常解の安定性を保証している。しかしながら (b) の場合で特に $d>0$ が小さいときは 3 種のバランスが微妙となり定数定常解が不安定となる。実際、(b) の条件下においては次が成立する。

**Theorem 2 ($\hat{\mathbf{u}}_p$ からの分岐解の存在)**
(i) $d_i^*>0$ をみたす $d_i^*$ は有限個である。ここで $d_i^*>0$ をみたす番号 $i$ のうちで最大のものを $i^*$ とすれば $0\le i\le i^*$ をみたすすべての $i$ に対して $d=d_i^*$ において正値定数定常解 $\hat{\mathbf{u}}_p$ から Hopf 分岐がおきる。
(ii) $d_j^{**}>0$ をみたす $d_j^{**}$ は有限個である。ここで $d_j^{**}>0$ をみたす番号 $j$ のうちで最大のものを $j^*$ とすれば $0\le j\le j^*$ をみたすすべての $j$ に対して $d=d_j^{**}$ において正値定数定常解 $\hat{\mathbf{u}}_p$ から分岐がおきる。

上記の定理を述べるため (すなわち安定性を議論するため) に固有値問題を考える必要がある。このような問題に対しては Fourier 級数展開を用いることにより対応する 3 次方程式を解析すればよいことがわかる。ここでは単純固有値に対する分岐を考えるために Crandalland-Rabinowitz [1]-[3] に即して議論を進める。これらの議論を適用するために、ノイマン境界条件における $-\Delta$ の固有値に対する単純性と対応する $d_i^*$ および $d_j^{**}$ がすべて一致・重複しない、という仮定の下で考察している。しかしながら反応項にある係数や固有値 $\alpha_i$ の関係により $d_i^*$ や $d_j^{**}$ が一致・重複する場合も考えられる。こういったことは対応する固有値が上記の 3 次方程式によって支配されるという事実に大きく関係している。このように問題に応じては分岐点において単純でない固有値を扱う場合も生じるが、今後はこのような固有値からの分岐解析を行っていきたい。

## References

[1] M. G. Crandalland P. H. Rabinowitz, *The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal. **67** (1977), 53-72.
[2] M. G. Crandalland P. H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability*. Arch. Rational Mech. Anal. 52 (1973), 161-180.
[3] M. G. Crandalland P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Functional Analysis **8** (1971), 321-340.

〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1
*URL*: http://www.aoni.waseda.jp/ohya/
*E-mail address*: ohya@aoni.waseda.jp

# 有界領域における GRAY-SCOTT モデルの定常解構造について

佐藤 典弘 (早稲田大学大学院理工学研究科)

次の Gray-Scott モデルの定常問題 (SP) に対して考察する.

$$\begin{aligned} &\Delta u - uv^2 + \lambda(1-u) = 0 && \text{in} \quad \Omega, \\ &\gamma\Delta v + uv^2 - v = 0 && \text{in} \quad \Omega, \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

ただし, $\Omega$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ $\mathbf{R^N}$ 内の有界領域であり, $\frac{\partial}{\partial n}$ は単位法線方向微分を表す. この問題に対して様々な観点から研究がなされてきたが, ここでは以下の問題について考える.

(I) 定常問題 (SP) に対する非自明解の非存在に関する $\lambda$ と $\gamma$ の十分条件を求める.
(II) 定常問題 (SP) に対する分岐構造はどのようになっているか?

問題 (I) に関する既知の結果はほとんどなかったが, 今回以下の定理を得ることができた.

**Theorem 1.** $\lambda \le 4$ とする. そのとき, $\lambda$ のみに依存するある正定数 $C_1(\lambda)$ が存在し, $\gamma \ge C_1(\lambda)$ を満たすならば, (SP) の解は定数のみである.

証明は [3] と同様な方針を用いる.

**Theorem 2.** $\lambda > 4$ かつ $\lambda\gamma \ge 1$ を仮定する. そのとき, $\lambda$ と $\mu_1$ のみに依存するある正定数 $C_2(\lambda, \mu_1)$ が存在して, $\gamma \ge C_2(\lambda, \mu_1)$ ならば, (SP) の解は定数のみである. ただし, $\mu_1$ はノイマン境界条件下での $-\Delta$ の第 1 固有値である.

Theorem 1 と同様の方針で Theorem 2 を証明することは困難である. 証明のために以下の最大値原理が必要である.

**Maximum Principle**([1]) $g \in C(\bar{\Omega} \times R^1)$ を仮定する.
(i) $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ が

$$\Delta w(x) + g(x, w(x)) \ge 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \mu} \le 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

を満たし, $w(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} w$ とおくならば, $g(x_0, w(x_0)) \ge 0$ が成り立つ.
(ii) $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ が

$$\Delta w(x) + g(x, w(x)) \le 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \mu} \ge 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

を満たし, $w(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} w$ とするならば, $g(x_0, w(x_0)) \le 0$ が成立する.

この最大値原理を用いて, 解のアプリオリ評価を得ることができる.

**Lemma 3.** $(u, v)$ を (SP) の任意の解とする. そのとき,

$$0 < u(x) \le 1, \quad v(x) \ge 0 \quad \text{for} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

**Lemma 4.** $\lambda\gamma \ge 1$ を仮定する. (SP) の解 $(u, v)$ について, 以下の不等式が成り立つ;

$$u(x) + \gamma v(x) \le \lambda\gamma \quad \text{for} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Theorem 2 の証明の鍵となるのは, $(u,v)$ を (SP) の解とした際に, $v$ に関するポアンカレ不等式の逆のタイプの不等式を導くことである;

$$\gamma\int_\Omega |\nabla v|^2dx \le C_3(\lambda)\int_\Omega (v-\bar v)^2dx.$$

ただし, $C_3(\lambda)$ は $\lambda$ のみに依存する正定数, $\bar v = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega vdx$ である.

次に, 問題 (II) に対して考察する. 以下の定理が成り立つことが知られている.

**Theorem MK**([2]) $\lambda > 4$ とする. $\mu_n > 0\,(n = 1,2,3\cdots)$ をノイマン境界条件における $-\Delta$ の第 $n$ 固有値であるとし, $(u_s,v_s) = \left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2\lambda}, \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2}\right)$ と定める.

$$\gamma_n := \frac{\mu_n+\lambda-v_s^2}{\mu_n\left(\mu_n+\lambda+v_s^2\right)}, \tag{1}$$

とおくと, $\gamma=\gamma_n$ において $(u_s,v_s)$ から非自明な解が分岐する.

**Remark 5.** (1) で定義した数列 $\{\gamma_n\}$ に関しては, (a)$\mu_1 \ge D(\lambda)$ のとき単調減少し 0 に収束する. また, (b)$\mu_1 < D(\lambda)$ のときは最初は単調増加するが, その後単調減少し 0 に収束する. ただし $D(\lambda) = \lambda - v_s^2 + v_s\sqrt{2\left(v_s^2-\lambda\right)}$ である.

$\gamma$ が $\gamma_n$ の近傍にあるとき, 解 $(u,v,\gamma) = (\Phi_n(\epsilon),\Psi_n(\epsilon),\gamma_n(\epsilon))$ は以下のように記述できる.

$$\begin{aligned}\Phi_n(\epsilon) &= u_s + \epsilon\left\{(a\phi_n)+u_*\right\},\\ \Psi_n(\epsilon) &= v_s + \epsilon\left\{(b\phi_n)+v_*\right\},\\ \gamma_n(\epsilon) &= \gamma_n + \epsilon\gamma'(0) + o(\epsilon).\end{aligned} \tag{2}$$

ただし, $\phi_n$ は $\mu_n$ に対応する第 $n$ 固有関数を表し, $u_*$ と $v_*$ は $o(1)$ の関数である. また, $a$ と $b$ は

$$a^2+b^2=1,\quad v_s^2a+(1-\gamma_n\mu_n)b=0,\quad a<0<b, \tag{3}$$

を満たす定数である.

分岐の方向性に関しては今まで知られていなかったが, 今回以下のように特徴付けを行うことができた.

**Theorem 6.** $\lambda > 4$ を固定する. $(\Phi_n(\epsilon),\Psi_n(\epsilon),\gamma_n(\epsilon))$ を (2) で与えられる分岐解とする. そのとき,

$$\gamma'(0) = \frac{(d-c)(2v_sa+u_sb)\int_\Omega \phi_n^3dx}{d\mu_n\int_\Omega\phi_n^2dx}.$$

ただし, $a$ と $b$ は (3) で定義した定数であり, $c$ と $d$ は

$$c^2+d^2=1,\quad 2c+(\gamma_n\mu_n-1)d=0,\quad c<d,$$

を満たす正定数である.

**Remark 7.** $2v_sa+u_sb$ は $\mu_n > 3v_s^2-\lambda$ のとき正であり, $\mu_n < 3v_s^2-\lambda$ のとき負である.

## References


[1] Y. Lou, W. M. Ni, *Diffusion, Self-Diffusion and Cross-Diffusion*, J. Differential Equations **131**(1996), no.1, 79-131.

[2] J. S. McGough, K. Riley *Pattern formation in the Gray-Scott model*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **5**(2004), no.1, 105-121.

[3] N. Sato, *Some nonexistence results of stationary solutions for the Gray-Scott model*, Nonlinear Anal. **65**(2006), no.8, 1644-1653.

# 双安定反応拡散方程式の遷移層を持つ定常解について

松澤　寛 (沼津工業高等専門学校 教養科)

# FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A TYPE SIMILAR TO $f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$ AND IT'S APPLICATION TO POISSON'S EQUATION

米田 剛
東京大学数理科学研究科

[1, 2] は $f'(x) = F(f(2x))$, $x \in \mathbb{R}$ （$F$ は或る条件を満たす）における大域解の存在を考えたり

$$f'(x) = af(\lambda x) + bf(x) \quad a,\ b \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad x \in [0, \infty) \tag{0.1}$$

の形の方程式の解をディリクレ級数で構成した。($a, b, \lambda$ は或る条件を満たす。) (0.1) に関しては物理的要請から出てきた方程式であり、電車のパンタグラフと架線が織り成す振動から考え出された方程式である ([6, 7] 参照)。[4, 5] はその (0.1) に於ける漸近解について研究している。その後 [8, 9, 10] では上述で紹介した参考文献の解析方法とは全く違った方法で、$f'(x) = 4f(2x)$ 及び $f'(x) = \lambda^2 f(\lambda x)$, $\lambda > 1$ の方程式の解の一つを構成をした。この構成方法を使うと数値計算が容易である。そのグラフを下に示そう。

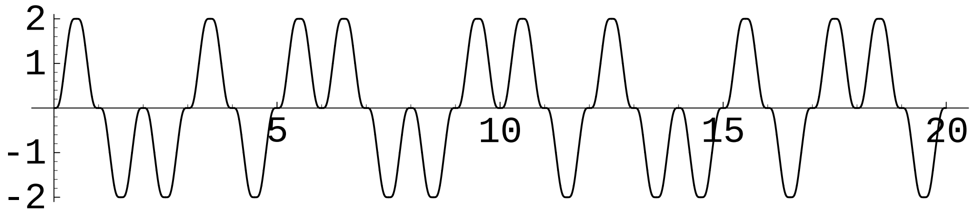



FIGURE 1. $f'(x) = 4f(2x)$

[10] で使われている方法論を使うと、$\phi'(x) = 2\phi(2x+1) - 2\phi(2x-1)$ 及びそれを一般化した形の関数微分方程式についての解の存在や一意性が議論できる。この方程式の解に関しては幅広い応用を有し、遅れ型関数微分方程式 ([11] 参照) や 1 次元ポアソン方程式に応用出来る。

主結果は次の通りである。

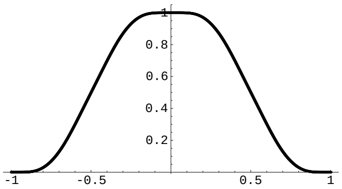
**Theorem 0.1.** 関数微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x) = \lambda^{|\alpha|+d} \sum_j c_j f(\lambda x - b_j), \quad \lambda > 1,\ c_j \in \mathbb{R},\ b_j \in \mathbb{R}^d \tag{0.2}$$

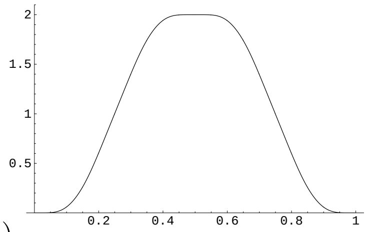
は $L^1(\mathbb{R})$ 上で解空間の次元が 1 になる。尚、$\{c_j\}_j$ と $\{b_j\}_j$ は或る条件を満たし、$\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2, \cdots, d$ において $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ は *multli-index* である。さらに解は $C^\infty(\mathbb{R})$ になり、パソコンによる数値計算も容易である。(数値計算の具体例は下を参照)

## REFERENCES

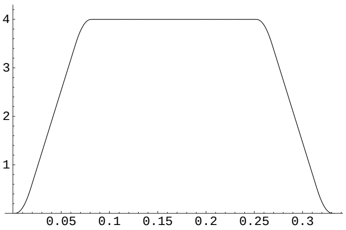
[1] P. O. Frederickson, *Global solutions to certain nonlinear functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 33 (1971), 355–358.




$f'(x) = 2f(2x+1) - f(2x-1)$




$f'(x) = 4f(2x) - 4f(2x-1)$




$f'(x) = 16f(4x) - 16f(4x-1)$


[2] P. O. Frederickson, *Dirichlet series solutions for certain functional differential equations*, Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations (Kyoto, 1971), 249–254. Lecture Notes in Math., Vol. 243, Springer, Berlin, 1971.

[3] Takasi Kusano, *Osillation of even order linear functional differential equations with deviating arguments of mixed type*, J. Math. Anal. Appl. 98 (1984), 341–347.

[4] T. Kato, *Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972), Academic Press, New York, 1972, 197–217.

[5] T. Kato and J. B. McLeod, *The functional-differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 891–937.

[6] L. Fox and D. F. Mayers, *On a functional-differential equation*, J. Inst. Maths Applics (1971) 8, 271–307.

[7] J. R. Ockendon and A. B. Tayler, *The dynamics of a current collection system for an electric locomotive*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. 322, 447–468 (1971).

[8] T. Yoneda, *Spline functions and* $n$*-periodic points*, Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, 15 (2005), 245–252.

[9] T. Yoneda, *On the functional-differential equation of advanced type* $f'(x) = af(2x)$ *with* $f(0) = 0$, J. Math. Anal. Appl., 317 (2006), 320–330.

[10] T. Yoneda, *On the functional-differential equation of advanced type* $f'(x) = af(\lambda x)$, $\lambda > 1$ *with* $f(0) = 0$, preprint.

[11] Yoshihiro Sawano and Tsuyoshi Yoneda, *Quarkonial decomposition suitable for integration*, to appear in Mathematische Nachrichten.

# 振り子の方程式の線形化問題に対するすべての固有値・固有関数について

若狭　徹 (早稲田大学大学院理工学研究科)
四ツ谷　晶二 (龍谷大学理工学部)

## 1. Introduction

次の 1 次元非線形境界値問題

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2 u''(x) + f(u(x)) = 0 & \text{in } (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

及び (1) の非自明解 $u = u(x)$ に対する線形化固有値問題

$$(2)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2 \varphi''(x) + f'(u(x))\varphi(x) + \mu\varphi(x) = 0 & \text{in } (0,1), \\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \end{cases}$$

について考える．ここで $\varepsilon > 0$, $f \in C^1(\mathbf{R})$ である．

問題 (1) はある反応拡散方程式の定常問題として与えられ, また (2) は定常解 $u(x)$ の安定性を決定する．文献 [1] や [3] によれば "time-map" と呼ばれる関数を解析することにより, (1) の解構造やその不安定指数が決定される．また $\varepsilon > 0$ が十分小さい場合は応用上重要であり, このとき $u(x)$ のグラフは layer や spike と呼ばれる特徴的なパターンを持つことが知られている．この場合の (2) の固有関数のグラフの形状について関心がある．

本講演では, "representation equation" と呼ばれる方程式を導き, これを解くことにより (2) の厳密解が求まることを示す．特にこれの方法を

$$f(u) = \sin u \quad (\text{振り子の方程式})$$

の場合に応用し, (1) の任意の非自明解 $u(x)$ に対する線形化問題 (2) の全ての固有値及び固有関数が, ある楕円積分を含む超越方程式により完全に決定されることを明らかにする．

## 2. Main Results

以下 $f(u) = \sin u$ とし, $-\pi \le u(x) \le \pi$ を仮定する．このとき (1) の全ての非自明解は $(\varepsilon_n(k), \pm u_n(x;k))$ の形により与えられる．ただし $n \in \mathbf{N}, k \in [0,1)$,

$$\varepsilon_n(k) := \frac{1}{2nK(k)}, \quad u_n(x;k) := 2\sin^{-1}\Big[k \cdot \mathrm{sn}\big(K(k)(1+2nx), k\big)\Big]$$

($K(k)$, $\mathrm{sn}(x,k)$ は第 1 種完全楕円積分及び Jacobi の楕円関数) である．特に $u_1(x;k)$ は $x$ について単調減少な関数である．

このとき (2) に対する representation equation は

$$(3)\qquad 2(\cos u - 1 + 2k^2)\Phi_{uu} - \sin u\Phi_u + (\cos u + \mu)\Phi = 0, \quad u \in (-2\sin^{-1}k, 2\sin^{-1}k)$$

により与えられる．以下準備として (3) の解析を行う．簡単な計算により $(\mu, \Phi) = (k^2 - 1, \cos u/2)$, $(k^2, \sin u/2)$ は (3) を満たすことがわかる．次に $k^2 - 1 < \mu < 0$ 又は $k^2 < \mu$ と

し, $\Phi_{cos}$ 及び $\Phi_{sin}$ を次により定義する:

$$\Phi_{cos}(u,\mu;k) := \sqrt{h(u,\mu;k)}\cdot\cos\left(\int_0^u \frac{\sqrt{2\rho(\mu,k)}}{\sqrt{\cos s - 1 + 2k^2}\cdot h(s,\mu;k)}ds\right),$$

$$\Phi_{sin}(u,\mu;k) := \sqrt{h(u,\mu,k)}\cdot\sin\left(\int_0^u \frac{\sqrt{2\rho(\mu,k)}}{\sqrt{\cos s - 1 + 2k^2}\cdot h(s,\mu;k)}ds\right),$$

ただし

$$h(u,\mu;k) := \begin{cases} \cos u - 1 + 2k^2 - 2\mu, & k^2-1<\mu<0, \\ 1-2k^2-\cos u + 2\mu, & \mu > k^2, \end{cases}$$

$$\rho(\mu,k) := \mu(\mu-k^2)(\mu-k^2+1)$$

である．これらは (3) の線形独立な解を与える ([2] の解法による)．またこれらの $u = \pm\sin^{-1}k$ における境界値は

$$A(\mu,k) := \sqrt{\frac{\mu(\mu-k^2+1)}{\mu-k^2}}\Pi\left(\frac{k^2}{\mu-k^2},k\right), \quad k\in[0,1), \quad k^2-1<\mu<0,\ k^2<\mu,$$

($\Pi(\nu,k)$ はパラメータ $\nu$, 母数 $k$ の第 3 種完全楕円積分) を用いて表すことができる．このとき次の事実を証明することができる．

**命題 1.** $0<A_0<\pi/2$ 又は $\pi/2<A_0$ とする．$\mu$ に関する超越方程式 $A(\mu,k)=A_0$ は任意の $k\in[0,1)$ に対して一意の解 $\mu(k,A_0)$ を持ち，さらに $\lim_{k\to 1-0}\mu(k,A_0)=0$ $(0<A_0<\pi/2)$, $1$ $(\pi/2<A_0)$ が成り立つ．

以下 $\mu_j^n(k)$ 及び $\varphi_j^n(x;k)$ $(n\in\mathbf{N},\ j\in\mathbf{N}\cup\{0\})$ は $(\varepsilon_n, u_n(x;k))$ に対する線形化問題 (2) の $(j+1)$-番目の固有値及び固有関数を表すものとする．以上の準備の下で次の定理が成り立つ．

**定理 1.** 線形化問題 (2) について次が成り立つ:

(i) $\mu_0^n(k) = k^2-1, \quad \varphi_0(x;k) = \cos\dfrac{u_n(x;k)}{2}.$

(ii) $\mu_n^n(k) = k^2, \quad \varphi_n^n(x;k) = \dfrac{1}{k}\sin\dfrac{u_n(x;k)}{2}.$

**定理 2.** $j\neq 0,\ n$ とする．このとき $\mu_j^n(k)=\mu(k,j\pi/2n)$ であり，対応する固有関数は次で与えられる:

$$\varphi_j^n(x;k) = \sqrt{h(u_n(x;k),\mu_j^n(k);k)}\cos\left(\int_0^x \frac{2\sqrt{\rho(\mu_j^n(k))}}{h(u_n(y;k),\mu_j^n(k);k)}dy\right).$$

## References

[1] N. Chafee and E.F. Infante, Applicable Anal., **4** (1974/75), 17-37.
[2] J. Kovacic, J. Symbolic. Comput., **2** (1986), 3-43.
[3] P. Brunovský and B. Fiedler, J. Differential Equations, **81** (1989), 106-135.
[4] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, Comm. Pure Appl. Anal., **3** (2005), 665-682.
[5] T. Wakasa, to appear in Funkcialaj Ekvacioj, **49** (2006), 321-336.

# 消散項付き非線形波動方程式の外部問題の解について

竹田 寛志 (東北大学大学院　理学研究科)

# ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH STARK POTENTIAL

中村能久 (熊本大学大学院　自然科学研究科　研究生)

本講演では次の Stark ポテンシャルのついた空間 1 次元における非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\text{(NLS)} \quad \begin{cases} i\partial_t u = -\dfrac{1}{2}\partial^2 u + V(x)u + F(u), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ここで $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial = \partial_x = \partial/\partial x$. 線形ポテンシャル $V$ は次で与えられる (Stark ポテンシャル).

$$(1) \qquad V(x) = Ex\ ;\ E \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ .$$

非線形項 $F(u) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 \bar{u}^3$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,2$ である.

近年, ボーズ-アインシュタイン凝縮の発見に伴い, 線形ポテンシャル効果の入った非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) の研究が盛んになってきている. 興味深い事にポテンシャル効果の入った NLS の解はポテンシャル効果の入ってない NLS の解と異なる性質を示す事がある. 例えば調和振動子ポテンシャル ($V(x) = c|x|^2$) の場合, その効果により $V \equiv 0$ の場合には爆発が起こる非線形項に対して時間大域解が存在したり, 長距離散乱理論が必要な非線形項に対して短距離散乱理論が適用できたり等である (例えば [2, 3] 参照). ここでは $V(x)$ が空間に関して線形の場合 (1) を扱う. 線形散乱理論においては次の定理に基づき様々な結果が知られている (例えば [12] 参照).

**定理 A** (Avron and Herbst[1]). $H_E = -\frac{1}{2}\partial^2 + Ex$ とする. $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(2) \qquad U_E(t)f = e^{-itH_E}f = e^{-\frac{it^3}{6}|E|^2}e^{-itEx}e^{\frac{t^2}{2}E\partial}e^{-itH_0}f,$$

ここで $g \in L^2$, $a \in \mathbb{R}$ に対して $e^{a\partial}g(x) = g(x+a)$, また $H_0 = (-1/2)\partial^2$ である.

この定理を NLS に適用する事により解の存在等が示される ([4, 11] 参照). 今回得られた結果は (NLS) の初期値問題の解の漸近挙動に関するものである ($E = 0$ の場合は, 例えば [5, 6, 10] 参照. また終値問題に関しては, 例えば [7, 8, 9, 11] 参照).

**定理 1.** 非線形項 $F(u) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 \bar{u}^3$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,2$ とする. $\frac{1}{2} < \gamma < 2$ に対して $u_0 \in H^\gamma \cap H^{1,\gamma}$ とし $\varepsilon = \|u_0\|_{H^\gamma\cap H^{1,\gamma}}$ は十分小さいと仮定する. このとき (NLS) の一意解 $u$ が存在して次を満たす.

$$u \in C([0,\infty); H^\gamma \cap H^{0,\gamma}),$$
$$\|u(t)\|_{L^\infty} = C\varepsilon((1+t)^{-1/2}).$$

ただし $C > 0$. さらにこのとき一意の終状態 $u_+ \in L^2 \cap L^\infty$ が存在して, ある $d > 0$ に対して

$$\|\mathcal{F}U_E(-t)u(t) - u_+\|_{L^2\cap L^\infty} = O(t^{-d}),\ \ as\ t \to \infty,$$

が成り立つ.

**注意 2.** 証明においてはゲージ不変性のない非線形項を評価する事が重要である *Avron-Herbst* の公式 (2) により, 初期値問題 (NLS) の一意解 $u$ には時間が大きくなると振動が生じてくる. よって非線形項が振動を伴った漸近挙動を示す。したがってこの振動に関して部分積分する事により必要な *decay* が得られ, (NLS) の解 $u$ は漸近自由であるという事が証明される.

## References


[1] J.E. Avron and I.W. Herbst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Commun. Math. Phys., **52** (1977), 239–254.

[2] R. Carles, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential*, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), no. 4, 757–772.

[3] R. Carles, *Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications*, SIAM J. Math. Anal., **35** (2003), no. 4, 823–843 .

[4] R. Carles and Y. Nakamura, *Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential* Hokkaido Math. J., **33** (2004), No. 3, 719–729.

[5] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to nonlinear Schrödinger equations and Hartree equations*, Amer. J. Math., **120** (1998), 369–389.

[6] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Large time behavior for the cubic nonlinear Schrödinger equations*, Canad. J. Math., **54** (2002), No. 5, 1065–1085.

[7] N. Hayashi, P.I. Naumkin, A. Shimomura and S. Tonegawa, *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in one and two space demension*, Electron. J. Differential Equations, **2004** (2004), No. 62, 1–16.

[8] Y. Kawahara, *Global existence and asymptotic behavior of small solutions to nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Differential Integral Equations **18** (2005), No. 2, 169–194.

[9] K. Moriyama, S. Tonegawa and Y. Tsutsumi, *Wave operators for the nonlinear Schrödinger equations with a nonlinearity of low degree in one or two space demension*, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), 983–986.

[10] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations, to appear.

[11] A. Shimomura and S. Tonegawa, *Remarks on long range scattering for nonlinear Schrödinger equations with Stark effects*, J. Math. Kyoto Univ., **45** (2005), No. 1, 205–216.

[12] 塩野入和彦, *Stark* 効果を持つ *2* 体 *Schrödinger* 作用素に対する散乱理論–新たな波動作用素の導入とその存在について–, 神戸大学 修士論文 (2003).

# 半導体デバイスモデルに由来する DRIFT-DIFFUSION 方程式系の解の減衰評価について

山本征法 (東北大学大学院理学研究科Ｍ２)

ここでは、半導体デバイスの解析に由来する Drift-Diffusion 型と呼ばれる方程式系の解析について講演する。応用上の観点から、特に空間次元 $n=2,3$ の場合を扱う。３次元のモデルについてはあらゆる半導体素子への応用が期待されるが、２次元のモデルについても、TFT 等の薄型素子の解析に対応している。

Mock[4] により提唱されたモデルは有界領域における Neumann 境界値問題として与えられたものであるが、今回は全空間におけるモデルについて扱う。

$$(D.D.)\ \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla(u\nabla\psi) = f, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ \partial_t v - \Delta v - \nabla(v\nabla\psi) = f, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi = v - u - g, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x)=u_0(x)\geq 0, v(0,x)=v_0(x)\geq 0, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで、$\partial_t u := \dfrac{\partial u}{\partial t},\quad \Delta u := \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$,

$u=u(t,x), v=v(t,x)$ は、それぞれ、半導体デバイス内での電子、正孔の密度分布を表す未知函数であり、$\psi=\psi(t,x)$ は、$u,v$ の分布によって形成される静電場のポテンシャルに対応している。又、非線形項 $f=f(u,v)$ は、電子と正孔の対消滅、対生成を表す函数であり、$g=g(x)$ は半導体に添加された二種類の不純物 (Accepter,Donor) の配合比率に関係する、与えられた時間定常函数である。

(D.D.) の解の適切性については、$f=f(t,x)$ を ($u,v$ に依らない) 既知函数とした場合に、後述の mild solution に対する考察によって、(D.D.S.) の時間局所解の存在が示されている。更に、$f\equiv 0$, 及び $g$ に適当な条件を課せば、エネルギー評価を行うことにより、$L^2(\mathbb{R}^n)$ における時間大域適切性を示すことが出来る [3]。

**Proposition.**[3] $n=2,3$ としたとき、

$$\begin{aligned} &u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), u_0, v_0 \geq 0,\ f\equiv 0,\ g\in H^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ &\quad \Longrightarrow\ \exists 1 u,v \in C\big([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)\big)\cap C\big((0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)\big)\cap C^1\big((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)\big). \end{aligned}$$

以下では、$f\equiv 0,\ g=0$ として解析を行う。扱う方程式 (D.D.) は、半導体内部において、電子と正孔が互いに作用しながら不純物上を分散していく様子を記述したものである。方程式の形からも明らかなように、この分散には、熱力学的な力と、電気的な力の二通りの力が関わっている。こうした物理的な背景から、(D.D.) の解の漸近挙動は消散的であることが予想される。実際、次の結果を得ることが出来る。更に、この定理を証明する過程で、半導体デバイス内での電子と正孔の分散における、熱力学的な力と電気的な力とのバランスを考えたとき、熱力学的な力の方が強く働くことも分かった。言い換えれば、半導体内における電子と正孔の分散の仕方は、媒質中の熱の分散の仕方に極めて近いということである。

**Theorem.**[$L^p-$減衰評価]
$n=2,3;\ 1\le p\le\infty,\ f=0,\ g=0$ とする。このとき (D.D.) の解 $u,v$ に対して、

$$\|u(t)\|_p\le C_1(n,p)\|u_0\|_1\,t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}+C_2(n,p)\|u_0+v_0\|_1^2\,t^{-\frac{n}{2}\left(2-\frac{1}{p}\right)+1},t>0,$$
$$\|v(t)\|_p\le C_1(n,p)\|v_0\|_1\,t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}+C_2(n,p)\|u_0+v_0\|_1^2\,t^{-\frac{n}{2}\left(2-\frac{1}{p}\right)+1},t>0.$$

この形の減衰評価の既存の結果としては、岡本 [7] によって、$1\le p\le 4$ の場合の評価が得られている。証明には、Nash の方法 [5] が用いられているが、この方法では、$p>4$ の場合の計算過程が煩雑となり、$p\le 4$ の場合と同様の評価は得られなかった。ここでは、岡本の結果を用いて Nash の方法とは異なるアプローチにより、先述の結果を得た。具体的には、mild solution に対して、[7] で得られた $1\le p\le 4$ の場合の結果、以下に示す補題、及び、熱核に対する $L^p$ 評価を用いることにより得られる。

**Definition.**[Mild solution][3]
$u,v\in C\big([0,T);L^2(\mathbb{R}^n)\big)$ が (D.D.S.) の mild solution であるとは、$u,v$ が次を満たすことである。

$$\begin{cases}u(t,x)=e^{t\Delta}u_0(x)-\displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\left\{\nabla(u\nabla\psi)(\tau,x)-f(u,v)\right\}d\tau, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\\ v(t,x)=e^{t\Delta}v_0(x)+\displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\left\{\nabla(v\nabla\psi)(\tau,x)+f(u,v)\right\}d\tau, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\\ -\Delta\psi(t,x)=v(t,x)-u(t,x)-g(x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

但し、$\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して、$\left(e^{t\Delta}\varphi\right)(x):=\dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)dy.$

**Lemma.**[Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式]
$1<r<\infty$,

$$\|\nabla(-\Delta)^{-1}f\|_r\le C(n,r)\|f\|_\rho,\ \tfrac{1}{r}=\tfrac{1}{\rho}-\tfrac{1}{n},\ \forall f\in L^r(\mathbb{R}^n).$$

## References


[1] Cazenave, T., Haraux, A., "An introduction to semilinear evolution equations", Oxford science publications, 1998.
[2] 儀我美一, 儀我美保, " 非線形偏微分方程式 ", 共立出版, 1999.
[3] Kurokiba, M., Ogawa, T., *Wellposedness for the Drift-diffusion system in $L^p$ arising from the semiconductor device simulation*, preprint.
[4] Mock, M.,S., *Asymptotic behavior of solutions of transport equations for semiconductor devices,* J. Math. Anal. Appl. **49** (1975), 215-225.
[5] Nash, J., *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations,* Amer. J. Math. **80** (1958), 931-954.
[6] 小川卓克, "非線形分散及び波動方程式に対する実解析的手法と適切性 ", Rokko lectures in mathematics(神戸大学), 2006.
[7] 岡本龍太郎, Drift-diffusion 型偏微分方程式系の解に対する $L^p-L^q$ 型時間減衰評価について, 九州大学修士論文, 2004 年.
[8] 米津宏雄, "改訂新版　半導体基礎用語辞典 ", 工学図書, 2006.



宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉６番３号
*E-mail address*: sa5m27@math.tohoku.ac.jp

# DRIFT-DIFFUSION 型モデルの解の減衰評価と漸近挙動について

小林　遼 (九州大学大学院数理学府)

本講演では、次のような非線形偏微分方程式系を考察する。

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ v_t - \Delta v - \nabla \cdot (v \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \Delta \psi = u - v. \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ここで、$u = u(x,t), v = v(x,t)$ はそれぞれ電子及び正孔密度である。また、$\psi$ は静電場のポテンシャルである。この方程式は半導体デバイスシミュレーションの最も単純なモデルであり、さらに数学的に理想化している。
初期条件を

$$(2)\qquad u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

とする。さらに、次を仮定する。

$$(3)\qquad u_0(x) \geq 0,\ v_0(x) \geq 0.$$

この初期値問題 (1),(2),(3) の大域解の存在は [1] で示されている。そこで、我々はこの解の $L^p$ 減衰評価およびその漸近挙動について調べた。解の $L^p$ 減衰評価はすでに [5] によって研究されているが、我々は次元 $n \geq 1$ に対して、[3] を参考にエネルギー法を用いて示した。また、解の漸近挙動についてもすでに [2] によって研究されているが、我々は $n = 3, 4$ に対してより最適な評価を得た。

**Theorem.1** [$u, v$ の $L^p$ 減衰評価]

次元 $n \geq 1$, $2 \leq p < \infty$ とする。$u, v$ が初期値問題 (1),(2),(3) の解のとき、$u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば、任意の $1 \leq q \leq p$ に対して、$p, q, n$ に依存するある正数 $C$ が存在して次が成り立つ。

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C E_0 (1+t)^{-\gamma}.$$

ただし、$\gamma = \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{q})$, $E_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ である。

**Corollary** [$u, v$ の $L^\infty$ 減衰評価]

次元 $n \geq 2$ とする。$u, v$ が初期値問題 (1.1),(1.2),(1.3) の解のとき、$u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、$n$ のみに依存する正数 $C$ が存在して次が成り立つ。

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 E_0 t^{-\frac{n}{2}}.$$

ただし、$E_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $C_1 = C\,(1 + E_0)$ である。

**Theorem.2** [$\nabla u, \nabla v$ の $L^p$ 減衰評価]

次元 $n \geq 2$ とする。$u, v$ が初期値問題 (1),(2),(3) の解のとき、$u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、任意の $2 \leq q < \infty$ に対して、$q, n$ に依存するある正数 $C$ が存在して次が成り立つ。

$$\|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 E_0 t^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\gamma}.$$

ただし、$\gamma = \frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})$, $E_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $C_2 = C\left(1 + E_0 + E_0^{2(1+\frac{2}{q})}\right)$ である。

次に、初期値問題 (1),(2),(3) の解 $u, v$ の漸近挙動について考察した。

$$w_u(x,t) := M_u G(x,t+1),$$
$$w_v(x,t) := M_v G(x,t+1).$$

ただし、$G(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\exp(-|x|^2/4t)$ は $n$ 次元の熱核、$M_u = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,dx, M_v = \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x)\,dx$ である。
このとき、解 $u, v$ が $w_u, w_v$ に漸近しながら減衰していることを上の結果を用いて示す。

**Theorem.3** [$u, v$ の漸近挙動]

次元 $n \geq 3$ とする。$u, v$ が初期値問題 (1),(2),(3) の解のとき、$u_0, v_0 \in L^1_1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、任意の $1 \leq q \leq \infty$ に対して、ある正数 $C$ が存在して次が成り立つ。ただし、$L^1_1(\mathbb{R}^n) := \{\, f \mid xf(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ である。

$$\|u - w_u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|v - w_v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \begin{cases} Ct^{-\gamma-\frac{1}{2}}\,\log(2+t)\,. & (n=3,\ q=1) \\ Ct^{-\gamma-\frac{1}{2}}\,. & \begin{pmatrix} n=3,\ 1<q\leq\infty, \\ \mathit{or} \\ n\geq 4,\ 1\leq q\leq\infty \end{pmatrix} \end{cases}$$

ただし、$\gamma = \frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})$ である。

## References

[1] M. Kurokiba and T. Ogawa, $L^p$ wellposedness for the drift-diffusion system arising from the semiconductor device simulation, *preprint*.
[2] P. Biler and J. Dolbeault, Long time behavior of solutions to Nernst-Planck and Debye-Hückel drift-diffusion systems, *Annales Henri Poincaré*, **1** (2000) 461-472.
[3] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, $L^p$ energy method for multi-dimensional viscous conservation laws and application to the stability of planar waves, *JHDE*, **1** (2004), 581-603.
[4] 儀俄　美一・儀俄　美保,「非線形偏微分方程式」, 共立出版 (1999).
[5] 岡本　竜太郎, Drift-diffusion 型偏微分方程式系の解に対する $L^p - L^q$ 型時間減衰評価について, 九州大学大学院数理学府修士論文 (2004).

*E-mail address*: ma205043@math.kyushu-u.ac.jp

# 消散的 TIMOSHENKO 系の解の減衰評価と漸近挙動について

井手　健太郎　(九州大学大学院数理学府)
川島　秀一　(九州大学大学院数理学研究院)

## 1.Introduction

次の消散的 Timoshenko 系を考える。

$$(DT) \quad \begin{cases} w_{tt} - (w_x - \psi)_x = 0, \\ \psi_{tt} - \sigma(\psi_x)_x - (w_x - \psi) + \gamma\psi_t = 0, \end{cases}$$

ただし、$\sigma'(0), \gamma > 0$ とする。$(DT)$ を線形化すると、

$$(LDT) \begin{cases} w_{tt} - (w_x - \psi)_x = 0, \\ \psi_{tt} - a^2\psi_{xx} - (w_x - \psi) + \gamma\psi_t = 0. \end{cases}$$

ただし、$a^2 = \sigma'(0)$ $(a > 0)$ とおいた。

この方程式系は物理学的には、Timoshenko beam と呼ばれる梁の振動を表現している。消散項のない本来の Timoshenko 系についての考察 Taylor [1],Taylor-Yau [2] で詳しく記述されているように、梁の中心からの距離を変数 $x$ にとると、$w$ は $x$ 軸方向に対する鉛直方向の梁の変位を表し、$\psi$ は梁の回転角度の変位を表している。

消散的 Timoshenko 系については、Rivera-Racke [3] の、次のような興味深い結果がある。(彼らは有限区間 $0 < x < L$ 上で、境界条件 $w = 0, \psi_x = 0$ の場合を考えた。) それは、$a = 1$ ならば解のエネルギーは指数的に減衰するのに対し、$a \neq 1$ であれば指数的減衰が起こらず多項式的に減衰するという結果である。つまり、伝播速度によって消散構造に違いがあるのだ。

また、原本 [4] は $-\infty < x < \infty$ 上で消散的 Timoshenko 系の消散構造を考察し、$a = 1$ ならば熱方程式と同様の多項式的減衰をし、$a \neq 1$ ならば可微分性の損失を伴う形での多項式的減衰をするという結果を得た。実は後者は、有限区間における $a \neq 1$ 場合の Rivera-Racke [3] の結果と同じである。

今回は、まず $a \neq 1$ の場合の原本 [4] の結果を紹介し、さらにその精密化について話す。

## 2. Main Result

以下、$a \neq 1$ を仮定する。系 $(LDT)$ において $u = w_t, v = w_x - \psi, y = \psi_t, z = a\psi_x$ と変数変換し、ベクトル表示すると、

$$(*) \qquad U_t + AU_x + LU = O$$

となる。ただし、

$$U = \begin{pmatrix} v \\ u \\ z \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

いま、

$$\Phi(i\xi) = -(i\xi A + L), \qquad (e^{t\Phi}\varphi)(x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{t\Phi(i\xi)}\hat{\varphi}(\xi)](x)$$

とおくと、$e^{t\Phi}$ は $(*)$ の半群を生成する。すなわち、$U_0 = {}^t(v_0, u_0, z_0, y_0)$ を初期値とする $(*)$ の解は $U(t) = e^{t\Phi}U_0$ で与えられる。

このとき、

$$e^{t\Phi(i\xi)} = \sum_{j=1}^{4} e^{t\lambda_j(i\xi)} P_j(i\xi)$$

と表される。ここで、$\lambda_j$ は固有値、$P_j$ は射影行列である。
まず始めに、原本 [4] の結果を述べる。

**Theorem 1(原本 [4]).** $t \in (0,\infty),\ k,l = 0,1,2,\cdots$ に対し、次の評価が成立する。

$$\|\partial_x^k e^{t\Phi}\varphi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-(\frac{1}{4}+\frac{k}{2})}\|\varphi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\varphi\|_{L^2}.$$

Theorem 1 の証明において、$e^{t\Phi(i\xi)}$ に対する次の Lemma 1 が重要になる。

**Lemma 1(原本 [4]).** $(\xi,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$ に対し、次の評価が成立する。

$$|e^{t\Phi(i\xi)}| \le Ce^{-c\rho(\xi)t}. \qquad \text{ただし、} \quad \rho(\xi) = \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

次に、

$$e^{t\Phi_0(i\xi)} = \sum_{j=1}^{2} e^{t\lambda_j^0(i\xi)}\Pi_j$$

とおく。ただし、$\lambda_j^0(i\xi) = -\kappa_j\xi^2, \quad \kappa_j = \frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4a^2}}{2}, \quad \Pi_j = E_{2,3}\,P_j^{(0)}\,{}^tE_{2,3}$,
$P_j^{(0)}$ は $P_j(i\xi)$ の $\xi$ の 0 次の項 , $j = 1,2$,

$$E_{2,3} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Theorem 2.** $t \in (0,\infty),\ k,l = 0,1,2,\cdots$ に対し、次の評価が成り立つ。

$$\|\partial_x^k(e^{t\Phi} - {}^tE_{2,3}\,e^{t\Phi_0}E_{2,3})\varphi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-(\frac{3}{4}+\frac{k}{2})}\|\varphi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\varphi\|_{L^2}.$$

Theorem 2 の証明では、Lemma 1 と次の Lemma 2 を用いる。

**Lemma 2.** $|\xi| \le r$ のとき $t \in (0,\infty)$ に対し、次の評価が成り立つ。

$$|e^{t\Phi(i\xi)} - {}^tE_{2,3}\,e^{t\Phi_0(i\xi)}E_{2,3}| \le C|\xi|e^{-c\xi^2 t} + Ce^{-ct}.$$

## References

[1] S.Taylor, A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability, Jounal of Conputational and Applied Mathematics, 114 (2000), 23-40.
[2] S.Taylor and S.Yau, Boundary control of a rotating Timoshenko beam, ANZIAM Jounal, 44(E) (2003), 143-184.
[3] J.E. Muñoz Rivera and R. Racke, Global Stability for damped Timoshenko systems, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 9 (2003), 1625-1639.
[4] 原本和夫、Timoshenko 系の解の漸近挙動、修士論文 (九州大学数理学府)、2005 年.

# 半線形熱方程式の解の $L^q$ 空間における漸近挙動

川上竜樹 (東北大学大学院理学研究科 D1)

次の半線形熱方程式の Cauchy 問題の解 $u = u(x,t)$ の $t \to \infty$ における漸近挙動を考える:

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) & \text{in} \ \ \mathbf{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x) \geq 0 & \text{in} \ \ \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

ここで $N \geq 1$, $\phi \in L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ であり, $f \in C([0,\infty))$ に対して, ある $[0,\infty)$ 上連続かつ単調増加な関数 $h = h(\tau)$ が存在して,

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\left|\frac{f(\tau)}{\tau}\right| \leq h(\tau) \text{ for all } \tau \in (0,\infty), \\ &\int_\delta^\infty h(\tau^{-\frac{N}{2}})d\tau < \infty \text{ for any } \delta > 0 \end{aligned}$$

を満たすとする．(1) の解 $u$ に対して (2) を満たす $f$ の典型的な例 $f(u) = u^p$, $p > 1 + 2/N$ に対して, 初期値に上と同じ仮定を置くことで, 任意の $q \in [1,\infty]$ に対して,

$$t^{(1-1/q)N/2}||u(\cdot,t) - c_* t^{-\frac{N}{2}}\psi(\cdot,t)||_{L^q(\mathbf{R}^N)} \to 0 \ \text{ as } \ t \to \infty$$

が成立する ([4] を参照)．また, $f(u) = -u^p$, $p > 1 + 2/N$ の場合, 初期値に上と同じ仮定を置くことで,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{N}{2}} \max_{x \in P_a(t)} |u(x,t) - c_*\psi(x,t)| = 0$$

となることが知られている．ここで

$$P_a(t) = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| \leq at^{\frac{1}{2}}\}, \quad a \geq 0, \ t \geq 0$$

である ([3] を参照)．本講演では, 非線形項 $f(u)$ を一般化すると共に, $L^q$ 空間において誤差項の評価を加えたより精密な漸近挙動を得ることを目的とする．

**定理 1.** (2) を仮定し,

$$\sup_{t>0} ||u(\cdot,t)||_{L^1(\mathbf{R}^N)} < +\infty, \ \lim_{t\to\infty} ||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = 0$$

を満たす (1) の解 $u$ を考える．このとき,

$$(3)\qquad \lim_{t\to\infty} ||(1+2t)^{\frac{N}{2}} u(\cdot,t) - c_*\psi(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = 0$$

が成立する．ここで,

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \\ c_* &= ||\phi||_{L^1(\mathbf{R}^N)} + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^N} f(u)dxdt \end{aligned}$$

である．

さらに, 定理 1 より詳しい漸近挙動として次を得る．

**定理 2.** 定理 1 と同じ条件の下で, さらに,

$$\int_{\mathbf{R}^N}(1+|x|^2+|\log\phi(x)|)|\phi(x)|dx<\infty.$$

を仮定する. このとき, 任意の $q\in[1,\infty]$ に対して, ある正定数 $C$ と $T$ が存在して,

$$||(1+2t)^{\frac{N}{2}}u(\cdot,t)-c_*\psi(\cdot,t)||_{L^q(\mathbf{R}^N)}\le Ct^{-\frac{1}{2}}+C\int_t^\infty h(\tau^{-\frac{N}{2}})d\tau \tag{4}$$

が任意の $\in(T,\infty)$ に対して成立する. ここで, 定数 $C=C(\phi,N,q,f)$ である.

この評価によって, 誤差項の評価を加えた減衰評価を得た. 特に $f(u)=0$, $f(u)=u^p$ の場合は (4) の減衰の度合いは最適であることもわかる.

定理 1 の証明はまず解 $u$ の減衰の度合いと正定数 $c_*$ の存在を比較原理を用いて証明し, 熱方程式の解の表現公式より Gauss 核に収束することを示す. 定理 2 は [1], [6] で用いられた relative entropy method を改善することによって得られる. 具体的には次の scale 変換を用いる.(1) の解 $u$ に対して $v$ を

$$u(x,t)=(1+2t)^{-\frac{N}{2}}v\left((1+2t)^{-\frac{1}{2}}x,\frac{1}{2}\log(1+2t)\right)$$

と置くと $v$ は

$$\begin{cases} v_s=\operatorname{div}(yv+\nabla v)+e^{(N+2)s}f(e^{-Ns}v) & \text{in } \mathbf{R}^N\times(0,\infty),\\ v(y,0)=\phi(y) & \text{in } \mathbf{R}^N \end{cases} \tag{5}$$

の解である. 証明の方針は (5) の解 $v$ と $v_s=\operatorname{div}(yv+\nabla v)$ の定常解である $G(s)$ との $L^1$ 空間における漸近挙動を求めていくことである. ここで,

$$||G(s)||_{L^1(\mathbf{R}^N)}=M=||\phi||_{L^1(\mathbf{R}^N)}+\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^N}e^{(N+2)s}f(e^{-Ns}v)dyds$$

である. しかし今回は, 非線形項の影響により解の $L^1$ 保存則が崩れているため, [1] や [6] で用いている Csiszar-Kullback の不等式 ([2], [5] を参照) を直接用いることはできない. そのため $M$ を改良し,

$$||G(\cdot,s)||_{L^1(\mathbf{R}^N)}=||\phi||_{L^1(\mathbf{R}^N)}+\int_0^s\int_{\mathbf{R}^N}e^{(N+2)s}f(e^{-Ns}v)dyds$$

かつ $G(y,s)\to G(y)$ as $t\to\infty$ なる $G(y,s)$ を用いて, $L^1$ 保存則を適用できるよう改善した.

## References

[1] J. A. Carrillo, G. Toscani, Asymptotic $L^1$-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 49 (2000), 113-142.

[2] I. Csiszar, Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations, Stud. Sci. Math. Hung., 2 (1967), 299-318.

[3] A. Gmira and L. Veron, Large time behavior of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbf{R}^N$, J. Diff. Eq., 53 (1984), 258-276.

[4] T. Kawanago, Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity, Ann. Ist. Henri. Poincaré., 13 (1996), 1-15.

[5] S.Kullback, A lower bound for dicrimination information in terms of variation, IEEE Trans. Info. Theory, 4 (1967), 126-127.

[6] G. Toscani, Kenetic approch to the asymptotic behavior of the solution to diffusion equations, Rend. Mate. Serie VII, 16 (1996), 329-346.

# LARGE TIME BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO THE GENERALIZED BURGERS EQUATIONS

加藤　正和 (大阪大学大学院 理学研究科)

次の一般化された Burgers 方程式

$$u_t + (f(u))_x = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{2}$$

の大域解の漸近挙動について考える．ここで, $u_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $f(u) = \frac{b}{2}u^2 + \frac{c}{3}u^3$, $b \neq 0$ かつ $c \in \mathbb{R}$ とする．また, $\beta \in [0, 1]$ に対して, $L^1_\beta(\mathbb{R}) \equiv \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) | \int_{\mathbb{R}} |u|(1 + |x|)^\beta dx < \infty\}$ とおく．[1] において, 以下で定義する非線型散逸波

$$\chi(x, t) \ \equiv \ \frac{1}{\sqrt{1+t}}\chi_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

に (1), (2) の解が漸近する事が示された．ここで,

$$\chi_*(x) \equiv \frac{1}{b}\frac{(e^{b\delta/2} - 1)e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi} + (e^{b\delta/2} - 1)\int_{x/2}^\infty e^{-y^2}dy}, \quad \delta \equiv \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx.$$

具体的には, ある $\beta \in (0, 1)$ に対して $u_0 \in L^1_\beta(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ であって, $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さければ

$$\|u(\cdot, t) - \chi(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C(1 + t)^{-1+\frac{1-\beta}{2}}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1_\beta}), \quad t \geq 0$$

が成り立つ事が示された．更に, [2] において, 初期値が遠方で十分速く減衰しているとき

$$\|u(\cdot, t) - \chi(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C(1 + t)^{-1}\log(2 + t), \quad t \geq 0 \tag{3}$$

が成り立つ事が Hopf-Cole 変換を用いて示されている．

本研究の目的は, $\delta c \neq 0$ の時, (3) の評価の最適性を示すことである．実際, 解の漸近形の第２項 $V(x, t)$ は以下で与えられる:

$$V(x, t) \ \equiv \ -\frac{cd}{12\sqrt{\pi}}V_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)t^{-1}\log(2 + t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ここで,

$$V_*(x) \equiv (b\chi_*(x) - x)e^{-\frac{x^2}{4}}\eta_*(x),$$

$$\eta_*(x) \equiv \exp\left(\frac{b}{2}\int_{-\infty}^x \chi_*(y)dy\right), \quad d \equiv \int_{\mathbb{R}} \eta_*^{-1}(y)\chi_*^3(y)dy.$$

$E_{1,\beta} \equiv \|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1_\beta}$ とおく．今回, 得られた結果は以下の通りである．

**定理 1.** $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ を仮定する．このとき, $E_{1,0}$ が十分小さければ, (1), (2) の大域解 $u \in C^0([0,\infty); H^1)$, $\partial_x u \in L^2(0,\infty; H^1)$ が一意的に存在する．更に, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ かつ $E_{1,1}$ が十分小さいと仮定すると, 次の減衰評価

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le CE_{1,1}(1+t)^{-1}, \quad t \ge 0 \tag{4}$$

が成り立つ.

定理 1 の証明では, 以下の線形微分方程式に対する解の表現と減衰評価が重要な役割を果たす:

$$z_t = z_{xx} - (b\chi z)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$z(x,0) = z_0(x). \tag{6}$$

ここで

$$\eta_1(x,t) \equiv \eta_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right), \quad \eta_2(x,t) \equiv \eta_1^{-1}(x,t), \quad G(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{x^2}{4t}}$$

とおく.

**補題 2.**

$$U[w](x,t,\tau) = \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t-\tau)\eta_1(x,t))\eta_2(y,\tau) \int_{-\infty}^{y} w(\xi)d\xi dy,$$
$$0 \le \tau < t, \quad x \in \mathbb{R},$$

とおくと、(5), (6) の解は以下で与えられる.

$$z(x,t) = U[z_0](x,t,0), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**命題 3.** $\beta \in [0,1]$, $p \in [1,\infty]$, $k$ を正の整数として, $z_0 \in L^1_\beta(\mathbb{R})$ かつ $\int_{\mathbb{R}} z_0(x)dx = 0$ を仮定する．このとき, (5), (6) の解に対して,

$$\|\partial_x^l z(\cdot,t)\|_{L^p} \le Ct^{(1-\frac{1}{p}+\beta+l)/2}\|z_0\|_{L^1_\beta}, \quad t > 0$$

が成り立つ．ここで, $l = 0, 1, \cdots, k$.

[1] S. Kawashima: *Large-time behavior of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.*, **A106** (1987), 164–194.
[2] A. Matsumura and K. Nishihara, 非線形微分方程式の大域解 (圧縮性粘性流の数学解析), 日本評論社, 2004.

大阪府豊中市待兼山町 1 番
*E-mail address*: smv648km@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp

# ASYMPTOTICS FOR VARIATIONAL PROBLEM WITH CRITICAL GROWTH AND SLIGHTLY POSITIVE DIRICHLET DATA

森山　繁 (首都大院理工学研究科)

$$\Omega \ : \ C^2 \text{ bounded domain in } \mathbf{R}^N, \quad N \geq 3, \quad p = \frac{N+2}{N-2}$$

上記の仮定の下で次の条件付き変分問題を考える。

$$\inf_{u \in A_{\gamma,\varepsilon}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \tag{1}$$

ここで

$$A_{\gamma,\varepsilon} = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ : \ u - \varepsilon \in H_0^1(\Omega), \ \gamma = \int_\Omega |u|^{p+1} \right\}, \ \varepsilon > 0$$

である。$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、(1) の positive minimizer $u = u_{\gamma,\varepsilon}$ が存在し、Euler-Lagrange 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{\gamma,\varepsilon} &= \lambda_{\gamma,\varepsilon} u_{\gamma,\varepsilon}^p \quad \text{in} \quad \Omega \\ \quad u_{\gamma,\varepsilon} &= \varepsilon \quad\quad\quad\ \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

($\lambda_{\gamma,\varepsilon} > 0$) を満たすことが知られている (L.A.Caffarelli and J.Spruck [1])。 そこで $\gamma$ を固定し、$\varepsilon \to 0$ としたときの $u_{\gamma,\varepsilon} = u_\varepsilon$ の挙動について考察する。$\Omega = B_R$ の場合には変分問題 (1) の extremal(球対称) は J.Li と M.Zhu の研究 [2] によって得られており、それを用いて直接的にアプローチできる。一般の有界領域に対しては次の結果を用いる。

**Lemma 1.** *For sufficiently small $\varepsilon > 0$,*

$$u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{-\frac{N-2}{4}} PU_{x_\varepsilon,\xi_\varepsilon} + w_\varepsilon + \varepsilon$$

*holds, where $\alpha_\varepsilon, \ \xi_\varepsilon \in \boldsymbol{R}^+, \ x_\varepsilon \in \Omega$ with*

$$\alpha_\varepsilon \to \alpha = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}, \quad \frac{\xi_\varepsilon}{d(x_\varepsilon, \partial\Omega)} \to 0,$$

$$x_\varepsilon \to x_0 \in \bar{\Omega}, \quad \lambda_{\gamma,\varepsilon} := \lambda_\varepsilon \to \frac{S_N}{\gamma^{2/N}}$$

*as $\varepsilon \to 0$ and $w_\varepsilon \in E_{x_\varepsilon,\xi_\varepsilon}, \ w_\varepsilon \to 0$ in $H_0^1(\Omega)$.*

ここで、$S_N = \pi N(N-2) \left[\frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)}\right]^{2/N}$ は $\mathbf{R}^N$ における Sobolev の不等式の最良定数であり、また $\xi > 0$, $a \in \Omega$ に対して $PU_{a,\xi}$ を

$$U_{a,\xi} = \left( \frac{\xi}{\xi^2 + |x-a|^2} \right)^{(N-2)/2} \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

の $H_0^1(\Omega)$ への projection とし,

$$E_{a,\xi} = \left\{ w \in H_0^1(\Omega) \Big| \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla PU_{a,\xi} = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \left( \frac{\partial}{\partial \xi} PU_{a,\xi} \right) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \left( \frac{\partial}{\partial a_i} PU_{a,\xi} \right) = 0 \right\}.$$

と定義する。 これを用いて次の結果を得る。

**Theorem 2.** *Let $u_\varepsilon \in \mathcal{A}_{\gamma,\varepsilon}$ be a positive minimizer of (1), then we have (after passing to a subsequence)*

(1) *There exists $x_0 \in \Omega$ such that*

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} S_N \gamma^{\frac{N-2}{N}} \delta_{x_0} \quad \text{as } \varepsilon \to 0$$

*in the sense of Radon measures.*

(2) *The above $x_0$ is a maximum point of the (negative) Robin function $R$.*

(3) *We have a blow up rate of the $L^\infty$-norm of $u_\varepsilon$ as $\varepsilon \to 0$:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = \frac{[N(N-2)]^{N/2}}{N} \omega_N S_N^{-\frac{N-2}{2}} \gamma^{\frac{N-2}{N}} |R_0|,$$

*where $\omega_N$ denotes the area of unit sphere in $\boldsymbol{R}^N$ and $R_0 = R(x_0)$ is a maximum value of $R(x)$.*

## References

[1] L.A.Caffarelli and J.Spruck.: Variational problems with critical Sobolev growth and positive Dirichlet data, Indiana Univ. Math. J. **39**, 1-18(1990).

[2] J.Li and M.Zhu.: Sharp Local Embedding Inequalities, Comm. Pure. Appl. Math. **1**, 122-144(2006).

# $L^p - L^q$ ESTIMATES FOR CAUCHY PROBLEMS OF LINEAR THERMOELASTIC WITH SECOND SOUND AND CLASSICAL THERMOELASTICITY IN 3-D

内藤　由香　(早大理工)

熱弾性体の運動において熱が有限伝播するように修正を加えた thermoelastic equation with 2nd sound と、修正前の calssical thermoelastic equation についての $L^p - L^q$ 評価を報告する。
次の方程式系を thermoelastic equation with 2nd sound という。

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla \mathrm{div}\ u + \beta\nabla\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \theta_t + \gamma \mathrm{div}\ q + \delta \mathrm{div}\ u_t = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \tau_0 q_t + q + \kappa\nabla\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x), \theta(0,x) = \theta_0(x), q(0,x) = q_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで、$\mu, \beta, \gamma, \kappa$ は正定数, $\lambda$ は $\mu + 2\lambda > 0$ なる定数, $\tau_0$ は正のパラメーターとする. この方程式系について Helmholtz 分解し, 次の方程式系に分けて考える.

$$\begin{cases} v_{tt} - \mu\Delta v = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ v(0,x) = v_0(x), v_t(0,x) = v_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_0 r_t + r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ r(0,x) = r_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_{tt} - \alpha\Delta\pi + \beta\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \theta_t + \gamma\Delta w + \delta\Delta\pi_t = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \tau_0 w_t + w + \kappa\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \pi(0,x) = f_1(x), \pi_t(0,x) = f_2(x), & \\ \theta(0,x) = f_3(x), w(0,x) = f_4(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

それぞれの方程式系について得られた解を $\mathbb{E}^1(t)\mathbb{F}, \mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}, \mathbb{E}^3(t)\mathbb{F}$ とおく.$\mathbb{E}^1(t)\mathbb{F}, \mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}$ についてはよく知られているので, $\mathbb{E}^3(t)\mathbb{F}$ についての定理を紹介する.

**定理 1.** $\mathbb{E}^3(t)\mathbb{F}$ は低周波部分と高周波部分に分解でき, それを

$$\mathbb{E}^3(t)\mathbb{F} = \mathbb{E}^3_0(t)\mathbb{F} + \mathbb{E}^3_\infty(t)\mathbb{F} = {}^t(\pi_0, \theta_0, \omega_0) + {}^t(\pi_\infty, \theta_\infty, \omega_\infty),$$

とおく. 更に, $\dot{\mathbb{E}}^3_0(t)\mathbb{F} = {}^t(\nabla^2\pi_0, \theta_0, \nabla\omega_0)$ とおくと, 次の評価が成り立つ.
*(1)* 任意の非不整数 $m$ と 任意の *multi-index* $\beta \in \mathbb{N}^3_0$ に対し,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \dot{\mathbb{E}}^3_0(t)\mathbb{F}\|_p \le C(m,\beta,p,q) t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-(\frac{m+|\beta|}{2})} \|F\|_q \ \forall t \ge 1$$

$1 \le q \le 2 \le p \le \infty,$

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \mathbb{E}^3_0(t)\mathbb{F}\|_p \le C(m,\beta,p,q) \|\mathbb{F}\|_q \ 0 < \forall t \le 1,$$

$1 \le q \le p \le \infty,\ (p,q) \ne (1,1),\ (\infty,\infty)$
*(2)* 任意の非不整数 $m$ と 任意の *multi-index* $\beta \in \mathbb{N}_0^3$ に対し,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \pi_\infty\|_p \le C(\beta,m)e^{-ct}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m),(|\beta|+m-1)^+,(|\beta|+m-2)^+,(|\beta|+m-1)^+}},$$

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \theta_\infty\|_p \le C(\beta,m)e^{-ct}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m+2),(|\beta|+m+1),(|\beta|+m),(|\beta|+m+1)}},$$

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \omega_\infty\|_p \le C(\beta,m)e^{-ct}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m+1),(|\beta|+m),(|\beta|+m-1)^+,(|\beta|+m)}},$$

$1 < p < \infty$.
ただし,$\mathbb{F} = {}^t(f_1,f_2,f_3,f_4)$ のとき $\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{k,l,m,n}(\mathbb{R}^3)} = \|f_1\|_{\mathbb{W}_p^k} + \|f_2\|_{\mathbb{W}_p^l} + \|f_3\|_{\mathbb{W}_p^m} + \|f_4\|_{\mathbb{W}_p^n}$,
$(l)^+ = l$ *if* $l \ge 0$ $(l)^+ = 0$ *if* $l < 0$ とする.

thermoelastic equation with 2nd sound において $\tau_0 = 0$ として得られる方程式系:calssical thermoelastic equation についても同様に Helmholtz 分解し, 得られた解を $\mathbb{E}^1(t)\mathbb{F}, \mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}$ とおいて,$\mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}$ についての定理を紹介する.

**定理 2.** $\mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}$ は低周波部分と高周波部分に分解でき, それを

$$\mathbb{E}^2(t)\mathbb{F} = \mathbb{E}_0^2(t)\mathbb{F} + \mathbb{E}_\infty^2(t)\mathbb{F} = {}^t(\pi_0,\theta_0) + {}^t(\pi_\infty,\theta_\infty),$$

とおく. 更に, $\dot{\mathbb{E}}_0^2(t)\mathbb{F} = {}^t(\nabla^2\pi_0,\theta_0)$ とおくと, 次の評価が成り立つ.
*(1)* 任意の非不整数 $m$ と 任意の *multi-index* $\beta \in \mathbb{N}_0^3$ に対し,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \dot{\mathbb{E}}_0^2(t)\mathbb{F}\|_p \le C(m,\beta,p,q)t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-(\frac{m+|\beta|}{2})}\|F\|_q \ \forall t \ge 1$$

$1 \le q \le 2 \le p \le \infty$,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \mathbb{E}_0^2(t)\mathbb{F}\|_p \le C(m,\beta,p,q)\|\mathbb{F}\|_q \ 0 < \forall t \le 1,$$

$1 \le q \le p \le \infty,\ (p,q) \ne (1,1),\ (\infty,\infty)$
*(2)* 任意の非不整数 $m$ と 任意の *multi-index* $\beta \in \mathbb{N}_0^3$ に対し,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \pi_\infty\|_p \le c(m,\beta,p,n)e^{-ct}\{t^{-\frac{n}{2}}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(2m+|\beta|-n)^+,(2m+|\beta|-n-2)^+,(2m+|\beta|-n-4)^+}}$$
$$+ \|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m),(|\beta|+m-1),(|\beta|+m-3)^+}}\},$$

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \theta_\infty\|_p \le c(m,\beta,p,n)e^{-ct}\{t^{-\frac{n}{2}}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(2m+|\beta|-n)^+,(2m+|\beta|-n)^+,(2m+|\beta|-n)^+}}$$
$$+ \|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m+1),(|\beta|+m),(|\alpha|+m-1)^+}}\},$$

$1 < p < \infty$.

# 走化性・増殖方程式とその有限要素近似系のグローバルアトラクタの次元評価

中口 悦史 (大阪大学大学院 情報科学研究科)

次の Mimura and Tsujikawa [5] による走化性・増殖方程式の一例を考える.

$$
\text{(CG)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\triangle u - \nu\nabla\cdot(u\nabla\rho) + fu^2(1-u) & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = b\triangle\rho - c\rho + du & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty),\\
u(x,0) = u_0(x),\quad \rho(x,0)=\rho_0(x) & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

ここで $\Omega$ は $\mathbb{R}^2$ の有界凸領域，パラメータ $a$, $b$, $c$, $d$, $f$, $\nu$ は正の実数である.

Aida et al. [1] による数値シミュレーションなどによって，走化性パラメータ $\nu$ が大きくなるにつれて，(CG) の解が形成するパターンはより複雑に，また種類も豊富になることが知られている．パターン形成過程の豊富さはグローバルアトラクタの構造の複雑さの現れである．しかし一方で，数値シミュレーションのために施された近似や離散化がパターン形成過程つまりアトラクタの構造に何も影響を及ぼさないという保証はない．この講演では，(CG) のグローバルアトラクタのフラクタル次元が $\nu$ の高々多項式オーダで増加すること，また，有限要素近似がこの増加度に影響しないことを示す.

方程式 (CG) の有限要素近似を以下のようにして与える．([7] を参照) $\{\tau_\xi\}_{\xi>0}$ を, $\xi = \max\{d_\sigma;\ \sigma\in\tau_\xi\} > 0$ を離散化パラメータとする，$\Omega$ の三角形分割の族とする．ただし $\sigma$ は $\tau_\xi$ に属する三角形を，$d_\sigma$ はその直径を表す．次の条件を仮定する.

(G): ある正数 $\nu$ があって $\xi$ に一様に

$$\nu\xi \le \rho_\sigma \le d_\sigma \le r_\sigma \le \nu^{-1}\xi,\quad \sigma\in\tau_\xi,$$

が成立する．ただし $r_\sigma$ と $\rho_\sigma$ はそれぞれ三角形 $\sigma$ の外接円と内接円の直径を表す.

有限要素関数の空間を

$$\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}) = \left\{ v\in\mathcal{C}(\overline{\Omega});\ \ \text{各 } \sigma\in\tau_\xi \text{ で } v|_\sigma \text{ は一次関数 } \right\}$$

と定義する．これは $L^2(\Omega)$ の閉部分空間と見なすことができるので，$L^2$-直交射影 $p_\xi$ : $L^2(\Omega)\to\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ を定義することができる．作用素 $\triangle$ の $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ における近似 $\triangle_\xi$ は $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ 上の有界作用素として，次式で定義される：

$$\langle\triangle_\xi\hat{u},\hat{v}\rangle_{L^2} = -\langle\nabla\hat{u},\nabla\hat{v}\rangle_{L^2},\quad \hat{u},\hat{v}\in\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}).$$

よって，(CG) の近似系は次のように与えられる.

$$
(\text{CG}_\xi)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} = a\triangle_\xi\hat{u} - \nu\chi_\xi(\hat{u})\hat{\rho} + fp_\xi\left[\hat{u}^2(1-\hat{u})\right] & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = b\triangle_\xi\hat{\rho} - c\hat{\rho} + d\hat{u} & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
\hat{u}(x,0) = \hat{u}_0(x),\quad \hat{\rho}(x,0)=\hat{\rho}_0(x) & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

この講演は Professor M. Efendiev (TU-Munich) と Professor W. L. Wendland (Uni. Stuttgart) との共同研究に基づくものである.

ここで $\chi_\xi(u)$ は $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ 上の有界作用素で，

$$\langle \chi_\xi(u)\hat{\rho}, \hat{v}\rangle_{L^2} = -\langle u\nabla\hat{\rho}, \nabla\hat{v}\rangle_{L^2}, \quad \hat{\rho}, \hat{v} \in \mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}),\ u \in L^2(\Omega),$$

で定義される．

既知の事実 [1, 7, 9] などから，(CG) のグローバルアトラクタ $\mathfrak{A}$ は $L^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$ の，($\mathrm{CG}_\xi$) のグローバルアトラクタ $\mathfrak{A}_\xi$ は $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})\times\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ の，それぞれコンパクト集合である．

主結果は以下の通りである．[3, 4, 6]

**定理 1.** 方程式 (CG) のグローバルアトラクタ $\mathfrak{A}$ のフラクタル次元は

(1) $\qquad C_1(\nu d)^1 \leq \dim\mathfrak{A} \leq C_2(\nu d)^6$

と評価される．ただし $C_1$ と $C_2$ は正の定数．

**定理 2.** 条件 (G) と，離散化パラメータ $\xi > 0$ が十分小さいことを仮定する．このとき，近似方程式 ($\mathrm{CG}_\xi$) のグローバルアトラクタ $\mathfrak{A}_\xi$ のフラクタル次元は

(2) $\qquad C_1(\nu d)^1 \leq \dim\mathfrak{A}_\xi \leq C_2(\nu d)^6$

と評価される．ただし $C_1$ と $C_2$ は $\xi$ に依存しない正の定数．

**証明の概略.** 上からの評価については，[2, §III.4] や [8, §V.3] にある volume contraction method を適用する：$\dim\mathfrak{A}$ の上界は，$q_N < 0$ を満たす最小の整数 $N$ によって与えられる．ここで $q_N$ は

$$q_N = \liminf_{T\to\infty} \sup_{U_0\in\mathfrak{A}} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Tr}_N(\mathcal{A}(S_tU_0))dt$$

で定義される．$\mathrm{Tr}_N(L)$ は作用素 $L$ の $N$-次元トレース，作用素 $\mathcal{A}(S_tU_0)$ は (CG) の変化方程式の係数作用素で，(CG) の非線形半群 $S_t$ の quasidifferential $W_t = S_t'(U_0)$ を生成するものとする．下界は (CG) の双曲型平衡点の不安定局所多様体の次元によって与えられる．詳しくは [1, 9] を参照のこと．$\dim\mathfrak{A}_\xi$ の上界と下界も全く同じ手順で得られる．

## References


[1] M. Aida, T. Tsujikawa, M. Efendiev, A. Yagi and M. Mimura, Lower estimate of attractor dimension for chemotaxis growth system, *J. London Math. Soc.* (to appear).

[2] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, AMS, Providence, 2002.

[3] M. Efendiev and E. Nakaguchi, Upper and lower estimate of dimension of the global attractor for the chemotaxis-growth system: Part I, *Adv. Math. Sci. Appl.* (to appear).

[4] M. Efendiev and E. Nakaguchi, Upper and lower estimate of dimension of the global attractor for the chemotaxis-growth system II: two-dimensional case, *Adv. Math. Sci. Appl.* (to appear).

[5] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, *Physica A* **230** (1996) 499–543.

[6] E. Nakaguchi, Discretizations of chemotaxis-growth system and dimension estimate of their attractors, AIMS' Sixth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, University of Poitiers, Poitiers, France, June, 2006.

[7] E. Nakaguchi and A. Yagi, Fully discrete approximations by Galerkin Runge-Kutta method for quasilinear parabolic systems, *Hokkaido Math. J.* **31** (2002) 385–429.

[8] R. Temam, *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] 八木厚志, M. Efendiev, 辻川亨 and 三村昌泰, 走化性・増殖方程式に対するアトラクタ次元の下方評価, 日本数学会 2005 年秋季総合分科会函数解析学分科会講演, 岡山大学.



〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1

*URL*: `http://www-cocono.ist.osaka-u.ac.jp/~nakaguti/`

*E-mail address*: `nakaguti@ist.osaka-u.ac.jp`

# リプシッツ関数を初期値とした場合のナヴィエ・ストークス方程式の可解性

澤田 宙広 (早大理工、学振 PD)

本講演では Matthias Hieber 先生（ダルムシュタット工科大学)、Abdelaziz Rhandi 先生（マラケッシュ大学）との共同研究 [1] を報告する。

全空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ での 非圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題は次で与えられる。

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} U_t - \Delta U + (U,\nabla)U + \nabla P = 0, \qquad \nabla \cdot U = F \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ U|_{t=0} = U_0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで $U = (U^1(x,t),\dots,U^n(x,t))$，$P = P(x,t)$ がそれぞれ流速ベクトル、圧力を表す未知関数である。初期速度 $U_0 := (U_0^1(x),\dots,U_0^n(x))$ と外力 $F = (F^1(x,t),\dots,F^n(x,t))$ は与えられたベクトル値関数であり、$\nabla \cdot U_0 = 0$ と $\nabla \cdot F = 0$ を満たす（両立条件)。

外力 $F$ に適当な仮定を課し、初期速度 $U_0$ を $L^n_\sigma(\mathbb{R}^n)$ の関数として与えた時の滑らかな解の時間局所存在と、$\|U_0\|_n$ が十分小さい場合の時間大域存在は既知である。滑らかな時間局所解の存在は、$L^p$ （ただし $p > n$）や $L^\infty$ などでも証明されている。そこで今回は、滑らかな解の時間局所存在定理が証明できる初期速度場の限界を探って行きたい。

１次元のモデルケース（Burgers 方程式）などの考察から、初期速度場が空間無限遠で１次増大している時が、その限界ではないかと推察される。例えば [2] 等を参照。そこで $\underline{U_0(x) := u_0(x) - f(x)}$ として与えて、滑らかな解の時間局所存在定理を導こう。ここで $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ とし、$f$ は globally Lipschitz 関数で次の３つの条件を満たすものとする：

$$(H1) \qquad \nabla \cdot f = 0,$$
$$(H2) \qquad \Delta f \in L^p_\sigma,$$
$$(H3) \qquad \exists \Pi : \text{ scalar function s.t.} \quad (f,\nabla)f = \nabla \Pi.$$

$(U,P)$ を (NS) の古典解とすると、$u := U + f$ と $\tilde{P} := P + \Pi$ は次の解となる。

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - (f,\nabla)u + (u,\nabla)u - (u,\nabla)f + \nabla \tilde{P} = \tilde{F}, \qquad \nabla \cdot u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで $\tilde{F} := F - \Delta f$ とした。

鍵となるのは半群の理論である。作用素 $A$ を $Au := -\Delta u - (f,\nabla)u + (u,\nabla)f$ と定める。定義域を $D(A) := \{u \in W^{2,p} \cap L^p_\sigma; (f,\nabla)u \in L^p\}$ で定める。この時、任意の $p \in (1,\infty)$ に対し、$-A$ は $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 上 $(C_0)$-半群を生成する事が知られている。例えば [3] や [4] などを参照。ただし、半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ は非解析的である。更に射影 $\mathbb{P} := (\delta_{ij} + R_iR_j)_{1\leq i,j\leq n}$（ただし $R_i := \partial_i(-\Delta)^{-1/2}$） とし、Duhamel の原理から積分方程式

$$\text{(INT)} \qquad u(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(u(s),\nabla)u(s)ds + 2\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(u(s),\nabla)f ds$$

を導く。ただし $u_1(t) := e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}\tilde{F}(s)ds$ として与える。(INT) の解を mild solution と呼ぶ事にする。

**定理 1.** $n \geq 2$、$p \in [n, \infty)$、$q \in [p, \infty]$ とする。$u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ とする。$f$ は *globally Lipschitz* 関数で、仮定 $(H1), (H2), (H3)$ を満たすとする。$F \in C([0,\infty); L^p_\sigma(\mathbb{R}^n))$ とする。このとき 時刻 $T_0 > 0$ と *mild solution* $u(t)$ が $t \in (0, T_0)$ 上、次のクラスで一意に存在する。

$$[t \mapsto t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}u(t)] \in C([0,T_0); L^q_\sigma(\mathbb{R}^n)),$$
$$[t \mapsto t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{1}{2}}\nabla u(t)] \in C([0,T_0); L^q(\mathbb{R}^n)).$$

**注意.** $f(x) = Mx$、ただし $M$ が $n \times n$ 行列の場合は、[5] で証明されている。すなわち、定理 1 は [5] の結果の一般化になっている。

定理 1 は縮小写像の原理（即ち逐次近似法）により証明される。その際に、次の不等式の用意が重要となる：任意の $n \geq 1$、$1 \leq p \leq q \leq \infty$ に対し、定数 $C > 0$ と $\omega \in \mathbb{R}$ があって

$$\|\nabla^k e^{-tA} f\|_q \leq Ce^{\omega t} t^{-\frac{k}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p$$

が任意の $t > 0$ と $k = 0, 1$ と $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ で成り立つ。さらに $p < q$ のとき、

$$t^{\frac{k}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\nabla^k e^{-tA} f\|_q \to 0 \qquad \text{as} \quad t \to 0$$

も成り立つ。

逐次近似法とは次の様にして解を構成する方法である。例えば $p = n$ とし、$\delta \in (0,1)$ を固定する。$j \geq 2$ に対し、関数列 $\{u_j\}$ を

$$u_{j+1}(t) := u_1(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(u_j(s), \nabla)u_j(s)ds + 2\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(u_j(s), \nabla)f ds$$

で定義する。アプリオリ評価により、ある $T_1 > 0$ があって、$t^{\frac{1-\delta}{2}}\|u_j(t)\|_{n/\delta}$ と $t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_j(t)\|_n$ が $t \leq T_1$ と $j \geq 1$ で一様に有界である事が言える。この一様有界性を用いると、$\{[t \mapsto t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}u_j(t)]\}_{j\geq 1}$ が $C([0,T_1]; L^q_\sigma)$ で、また $\{[t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}\nabla u_j(t)]\}_{j\geq 1}$ が $C([0,T_1]; L^q)$ でコーシー列になる事が示せる。この収束極限が mild solution となる。一意性は Gronwall の不等式から従う。

**参考文献.**

[1] M. Hieber, A. Rhandi and O. Sawada, (preprint).
[2] Y. Giga and K. Yamada, Bol. Soc. Paran. Mat., **20** (2002), 29-49.
[3] G. Metafune, D. Pallara and V. Vespri, Houston J. Math., **31** (2005), 605-620.
[4] A. Lunardi and G. Metafune, Differential Integral Equations, **17** (2004), 73-97.
[5] M. Hieber and O. Sawada, Arch. Ration. Mech. Anal., **175** (2005), 269-285.

# 半導体を記述するある流体力学モデルの解の漸近挙動について

松村　昭孝 (大阪大学大学院情報科学研究科), 村上　尊広 (大阪大基礎工 D1)

半導体内の電荷のキャリア (電子や正孔) の運動を記述する一次元モデルの１つとして, 次の流体力学モデルが知られている ('01,[1]):

$$(EQ)\qquad \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = \rho\phi_x - \dfrac{\rho u}{\tau}, \quad (x,t) \in (0,1)\times[0,\infty), \\ \phi_{xx} = \rho - D. \end{cases}$$

ここに, 未知関数 $(\rho,u,\phi)$=$(\rho,u,\phi)(x,t)$ はそれぞれ電荷密度 $(\rho>0)$, 電荷速度, 静電ポテンシャルを表し, $D$=$D(x)$ は $doping\ profile$ と呼ばれる与えられた背景の不純物の電荷密度である. また, $P$=$P(\rho)$ は圧力と密度の関係, $\tau=\tau(\rho,\rho u)>0$ は緩和時間を表す関数で, ここでは $P(\rho)=\rho^\gamma(\gamma\geq 1), \tau=1$ で与えられる. 方程式系 (Eq) に初期条件と Dirichlet 境界条件:

(1) 初期条件 $\quad (\rho,u)(x,0)=(\rho_0,u_0)(x), \quad x\in(0,1),$

(2) 境界条件 $\quad \rho(0,t)=\rho_1, \quad \rho(1,t)=\rho_2, \quad t\geq 0,$

(3) $\quad \phi(0,t)=0, \quad \phi(1,t)=\Phi_1, \quad t\geq 0,$

を課した初期値境界値問題については, Degond, Markowich('93,[2]) により亜音速の場合の定常解 $(\hat\rho,\hat u,\hat\phi)(x)$ の存在と一意性が考察され, また十分滑らかな時間大域解の漸近挙動については, この亜音速定常解の漸近安定性が, H.-L.Li, P.Markowich と M.Mei('03,[3]) によって考察されている. しかしながら, これらの漸近挙動の結果については各種データが小 $\big(|\rho_1-\rho_2|, |\rho_0-\rho_1|, |\Phi_1|, |D-\rho_1|\ll 1\big)$, つまり, 時間大域解がほとんど定数状態 $(\hat\rho,\hat u,\hat\phi)$ =$(\overline{\rho},0,0)$ に近い場合 $(\overline{\rho}:=\rho_1=\rho_2)$ の議論であり, 物理的・数学的にも興味深いデータの大きい時については, 何も答えていない. 本研究では, まずデータが大きい時の研究のために, Dirichlet 境界条件より少し扱いが容易な周期境界値問題で大きなデータについての漸近安定性を調べた. ここで, 周期境界値問題とは, 方程式系 (Eq) に初期条件と空間的に周期境界条件:

(4) 初期条件 $\quad (\rho,u)(x,0)=(\rho_0,u_0)(x), \quad x\in R.$

(5) 境界条件 $\quad (\rho,u,\phi)(x+1,t)=(\rho,u,\phi)(x,t), \quad x\in R, t\geq 0,$

を課した初期値境界値問題である. この初期値境界値問題 (Eq),(4), (5) において, 以下の条件

$$(6)\qquad \inf_{x\in R} D>0, \quad \inf_{x\in R}\rho_0>0, \quad \int_0^1 \rho_0 dx = 1$$

の下に, 大域解の漸近挙動を調べ次の結果を得た.

≪ **定理 (時間大域解の漸近挙動)** ≫
初期値境界値問題 (Eq),(4),(5) の十分滑らかな時間大域解に対し以下が成立する.
) $\gamma \geq 2$ ならば, 正定数 $\nu$,$E_0$ が存在して,

$$\int_0^1 \rho u^2 + (\rho - \hat{\rho})^2 + (\phi - \hat{\phi})_x^2 dx \leq E_0 \exp\{-\nu t\}, \quad t \geq 0.$$

) $2 > \gamma \geq 1$ のとき, $M := \sup_{x,t} \rho(x,t) < +\infty$ が成立するならば, 正定数 $\nu(M)$,$E_0(M)$ が存在して,

$$\int_0^1 \rho u^2 + (\rho - \hat{\rho})^2 + (\phi - \hat{\phi})_x^2 dx \leq E_0 \exp\{-\nu t\}, \quad t \geq 0.$$

上の結果は, 十分滑らかな時間大域解の存在を仮定したとき, 任意の初期値と $doping\ profile$ に対して, 時間大域解は対応する定常解との差が上記の意味で, 時間の経過に伴い指数的に 0 に減衰することを示したものである. しかしながら, 大域解の存在自体を示すには十分なアプリオリ評価となっていない. 一方, 任意の初期値に対する滑らかな時間大域解存在の問題は, $Dirichlet$ 境界条件において, ある初期値に対して導関数が有限時間に爆発することを証明している ('98,[4]) の結果を考えると否定的であることが予測される. そこで, 次に解の初期条件を強め, 任意の滑らかな定常解に対して, 初期値が定常解の近くに存在する場合の時間大域解の存在と漸近挙動を調べ, 次の結果を得た.

≪ **定理 (定常解の漸近安定性)** ≫
初期値 $(\rho_0, u_0) \in H^2$ 及び $doping\ profile D$ について条件 (6) の他, $D \in H^1$ を仮定する. このとき, ある定数 $\delta > 0, C > 0, \beta > 0$ が存在して, 次が成立する：$\|(\rho_0 - \hat{\rho}, u_0)\|_2 \leq \delta$ ならば, 初期値境界値問題 (Eq),(4),(5) は唯一の時間大域解 $\big(\rho, u) \in C^0([0,\infty); H^2) \cap C^1([0,\infty); H^1\big), \phi \in C^0([0,\infty); H^4) \cap C^1([0,\infty); H^3)$ を持ち,

$$\|(\rho - \hat{\rho}, u)(t)\|_2 + \|(\phi - \hat{\phi})(t)\|_4 \leq C\|(\rho_0 - \hat{\rho}, u_0)\|_2 \exp\{-\beta t\},$$

が成立する.

## References


[1] A. Jüngel, Quasi-hydrodynamic semiconductor equations, Progress in Nonlinear Differential Equations,Birkhaüsser, 2001.
[2] P. Degond and P.A. Markowich, On a one-dimensional steady-state hydrodynamic model, Appl. Math. Lett, 3 (1990), 25-29.
[3] H.-L. Li, P.Markowich and M.Mei, Asymptotic behavior of solutions of the hydrodynamic model of semiconductors, Proc. Royal Soci. Edinburgh A 132 (2002) 359-378.
[4] G.-Q.Chen and D.Wang, Formation of singularities in compressible Euler-Poisson fluids with heat diffusion and damping relaxation,J.Differential Equations,144(1998),44-65.
[5] 非線形微分方程式の大域解 (圧縮性粘性流の数学解析), 松村昭孝・西原健二著, 日本評論者, 2004.
[6] Shinya Nishibata and Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of a stationary solution to a hydrodynamic model of semiconductors, to appear.


〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3 阪大基礎工数理教室

# ON THE NAVIER-STOKES FLOWS WITH A NONTRIVIAL FLUX CONDITION IN AN APERTURE DOMAIN

久保 隆徹 (早稲田大学理工学術院)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ を 境界 $\partial\Omega$ が滑らかな aperture domain とする．すなわち、ある正定数 $R$ に対して $\Omega \setminus B_R = (H_+ \cup H_-) \setminus B_R$ なる領域とする．ここで，$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$, $H_\pm = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_n > 1\}$ とおいた．この領域 $\Omega$ において，次の nonstationary Navier-Stokes 方程式を考える：

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = a. \end{cases}$$

さらに，次の nontrivial-flux 条件を課す：$\phi(u) = \displaystyle\int_M N \cdot u d\sigma = \alpha(t)$.

主結果を述べる前に， aperture domain において知られている事実を述べておく．

Farwig-Sohr [1] により Helmhortz 分解：$L^p(\Omega)^n = J^p(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$ が成立することが示されている．ここで，$J^p(\Omega)$, $G^p(\Omega)$ は次のように表される：

$$J^p(\Omega) = \overline{\{u \in C_0^\infty(\Omega)^n \mid \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega\}}, \qquad G^p(\Omega) = \{\nabla \pi \in L^p(\Omega)^n \mid \pi \in L^p_{loc}(\overline{\Omega})\}$$

また，$J^p(\Omega)$ は flux 条件 $\phi(u)$ を用いて次のように特徴付けることが出来る：

$$J^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla \cdot u = 0, \ \nu \cdot u|_{\partial\Omega} = 0, \ \phi(u) = 0\}$$

ここで，$\nu$ は $\partial\Omega$ の単位外法線である．$1 < p < \frac{n}{n-1}$ のときは，自動的に $\phi(u) = 0$ を満たし，それ以外の時には $\phi(u) = 0$ を課さなければ (NS) の解の一意性が導くことが出来ないことが知られている．

次に Stokes 作用素について考える．ソレノイダル部分への連続射影作用素を $P : L^p(\Omega)^n \to J^p(\Omega)$ とおく．このとき，Stokes 作用素 $A$ を $Au = -P\Delta u$ $(u \in D(A))$ で定義する．ここで，定義域 $D(A)$ を

$$D(A) = W^{2,p}(\Omega)^n \cap W_0^{1,p}(\Omega)^n \cap J^p(\Omega)$$

とする．Farwig-Sohr [1] により $-A$ は $J^p(\Omega)$ 上解析的半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を生成することが示されている．この Stokes 半群に対して次の $L^p$-$L^q$ 評価が成立することを前回の若手発展方程式セミナーで報告した．

**補題 1** ($L^p - L^q$ 評価)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ を aperture domain とする．
(1) $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $(p, q) \neq (1, 1), (\infty, \infty)$ とする．このとき，次の評価が成立する．

$$\|T(t)f\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,q} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, f \in J^p(\Omega).$$

(2) $1 \leq p \leq q < \infty$ $(q \neq 1)$ とする．このとき，次の評価が成立する．

$$\|\nabla T(t)f\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,q} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, f \in J^p(\Omega).$$

前回は，さらにこの Stokes 半群に対する $L^p - L^q$ 評価を用いて，Flux 条件 $\alpha(t) \equiv 0$ の条件下での小さい初期値に対する時間大域解の存在とその時間無限大における漸近挙動についての結果を紹介した．

今回は，Flux 条件 $\alpha(t) \not\equiv 0$ の場合において示すことが出来た結果を紹介する．結果を紹介する前に特殊な関数を紹介しよう．Galdi [2] (Vol.I VI) により，次の関係を満たすような $\chi(x) \in$

$C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{2,q}(\Omega)$ $(n/(n-1) < q < \infty)$ を作ることが出来る：

$$(1) \qquad \phi(\chi) = 1, \quad \nabla \cdot \chi = 0, \quad \chi|_{\partial\Omega} = 0.$$

この特殊な関数を用いて，non-trivial な Flux 条件を満たす (NS) の解 $u$ を $u = v + \alpha(t)\chi(x)$ とおくことにより，0-Flux 条件の時の問題に帰着させることが出来る．実際，$v$ は次の方程式を満たすことが分かる：

$$\text{(v-NS)} \begin{cases} \partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla \pi = I(\alpha, \chi) + L(v), \quad \nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \qquad v|_{t=0} = a(x) - \alpha(0)\chi(x), \qquad \phi(v) = 0. \end{cases}$$

ここで,

$$I(\alpha, \chi) = -\alpha_t \chi + \alpha \delta \chi - \alpha^2 \chi \cdot \nabla \chi, \qquad L(v) = \alpha v \cdot \nabla \chi - \alpha \chi \cdot \nabla v$$

とおいた．この $v$ に対して，加藤の方法 [3]（または，縮小写像の原理）を適用するために，(v-NS) にソレノイダル部分への連続射影作用素 $P$ を作用させた次の方程式を考える．

(P-v-NS)

$$\partial_t v + Av = -P(v \cdot \nabla v) + PL(v) + PI(\alpha, \chi), \ v(0) = a(x) - \alpha(0)\chi(x).$$

これを次の積分方程式になおす:

$$v(t) = T(t)v(0) - \int_0^t T(t-s)P(u \cdot \nabla u)(s)ds + \int_0^t T(t-s)PL(v)(s)ds + \int_0^t T(t-s)PI(\alpha, \chi)(s)ds.$$

これに対して、菱田の方法 [4] と同様にして，Stokes 半群の $L^p$-$L^q$ 評価を適用すれば次を得る．

**主定理 2.** $n \geq 3$ とする．$\theta_0 < 1 - n/2q, \ \theta_\infty > 1/2$ に対して，Flux $\phi(u) = \alpha(t)$ は次を満たす減少関数とする：

$$|\alpha(t)| \leq Ct^{-\theta_0}, \qquad |\partial_t \alpha(t)| \leq Ct^{-\theta_\infty}$$

とする．このとき，次を満たすような正定数 $\delta = \delta(\Omega, n)$ が存在する：$a - \alpha(0)\chi \in J^n(\Omega)$ に対して，$\|a - \alpha(0)\chi\|_{L^n} \leq \delta$ であれば，Flux $\phi(t) = \alpha(t)$ をもつ (NS) は時間大域解をもち，$t \to \infty$ のとき,

$$\|u(t)\|_{L^r(\Omega)} = o(t^{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2r}}) \qquad \text{for } n \leq r \leq \infty,$$
$$\|\nabla u(t)\|_{L^r(\Omega)} = o(t^{-1+\frac{n}{2r}}) \qquad \text{for } n \leq r < \infty.$$

参考文献

[1] R. Farwig and H. Sohr: Helmholtz decomposition and Stokes resolvent system for apeture domains in $L^q$-space, Analysis 16, 1-26(1996)

[2] Giovanni P. Galdi: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol.I: Linearized Steady Problems, Vol. II: Nonlinear Steady Problems, Springer, New York, 1994.

[3] T. Kato: Strong $L^p$-Solutions of the Navier-Stokes Equation in $\mathbb{R}^n$, with Applications to weak solutions. Math. Z. 187,471-480 (1984)

[4] T. Hishida: The nonstationary Stokes and Navier-Stokes flows through an aperture. Elliptic and parabolic problems (Rolduc/Gaeta, 2001), 126-134, World Sci. Math. Ann. 285, 265-288

*E-mail address*: kubo@waseda.jp

# 微小重力環境でのすす燃焼パターンの反応拡散モデルについて

池田幸太 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)
三村昌泰 (明治大学理工学部数学科)

## 1. 導入

近年, 微小重力環境における燃焼の伝播は地上のそれとは異なり, 燃焼過程で指状のパターンが現れることが実験によって観察された ([1]). 微小重力環境下では対流の効果が小さく地上と比べ酸素が供給されにくいためこのような現象が起こると考えられている. また微小重力環境下でなくとも対流効果を無視できる実験において酸素の供給速度が小さければ, 一定速度一定濃度で一様に窒素と酸素の混合気体を供給し, かつ一様な着火をしたにもかかわらず燃焼は必ずしも一様に進行せず, 燃焼面の一様性が破れ, 供給速度に依存して定性的に異なる３つの空間的なパターンが燃焼跡に現れることが別の実験によって観察された ([3]).

この現象を理論的に調べるため, 次のモデル方程式が導出されている ([4]):

$$
\text{(RD)}\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = & L_e\Delta u + \lambda\dfrac{\partial u}{\partial x} + \gamma k(u)vw - au^m, \quad (x,y)\in I\times\Omega, t>0,\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} = & -k(u)vw, \quad (x,y)\in I\times\Omega, t>0,\\
\dfrac{\partial w}{\partial t} = & \Delta w + \lambda'\dfrac{\partial w}{\partial x} - k(u)vw, \quad (x,y)\in I\times\Omega, t>0.
\end{cases}
$$

ここで $u, v, w$ はそれぞれ温度, 紙の密度, 酸素と窒素の混合気体濃度を表し, $k(u) = exp(-1/u)$ はアレニウス則から得られる非線形項である. $I\subset(-\infty,\infty)$ は $(0,l_x)$, $(-\infty,\infty)$ のいずれかであり, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は有界領域とする. また (RD) に含まれるパラメータはそれぞれ $L_e, a, \gamma>0$, $m\geq 1$, $\lambda, \lambda'\geq 0$ を満たすとする.

$u$ が満たすべき境界条件について述べる. $I=(0,l_x)$ であれば $(x,y)\in\partial I\times\Omega, t>0$ で $u$ は Neumann 境界条件を満たすとする. 一方 $I=(-\infty,\infty)$ の場合は任意の $y\in\Omega, t>0$ に対して $u$ は $\lim_{|x|\to\infty}u(x,y,t)=0$ を満たすとする. またいずれの場合も $(x,y)\in I\times\partial\Omega, t>0$ に対して $u$ は Neumann 境界条件を満たすとする. 次に $w$ が満たすべき境界条件について述べる. $I=(0,l_x)$ であれば $y\in\Omega, t>0$ に対して $\partial w/\partial x(0,y,t)=0$ 及び $w(l_x,y,t)=w_R$ を満たすとする. ここで $w_R>0$ は右端からの供給濃度を表す定数である. 一方 $I=(-\infty,\infty)$ の場合は任意の $y\in\Omega, t>0$ に対して $w$ は $\lim_{x\to\infty}w(x,y,t)=w_R$ 及び, $\lim_{x\to-\infty}w(x,y,t)=w_L$ を満たすとする. ここで $w_L>0$ は定数である. またいずれの場合も $(x,y)\in I\times\partial\Omega, t>0$ に対して $w$ は Neumann 境界条件を満たすとする.

初期値は $u(x,y,0)=u_0(x,y)\geq 0$, $v(x,y,0)=v_0(x,y)\geq 0$, $w(x,y,0)=w_0(x,y)\geq 0$ を満たすとする.

(RD) は一定速度一定濃度で一様に酸素を供給する状況を表す. 数値シミュレーションから, 供給速度を表すパラメータ $\lambda'$ の値が大きいときには燃焼界面に摂動を加えても時間が十分に経過すれば再び燃焼界面は一様に進行すること, 徐々に $\lambda'$ の値を小さくしていくと燃焼界面の不安定化が起こり燃焼界面は波状になること, さらに $\lambda'$ の値を小さくしていくと指状の空間パターンが燃焼跡に現れることを示される. 我々の目的はこれらの数値シミュレーション結果の数学的保証を与えることであるが, 今回はその第一歩である.

## 2. 時間大域的な解の存在とその挙動

初期値が適当な滑らかさや可積分性を持つとき (RD) に古典解が一意的かつ時間大域的に存在することが示される. まず時間局所的な解の存在は解析的半群を用いて示すことができ, 例えば [2] を参照されたい. 一方時間大域的な解の存在については次の補題から得られる.

**補題 1.** 初期値 $u_0, v_0, w_0$ に対してある十分大きな定数 $R > 0$ が存在して, $\|u_0\|_{L^\infty}$, $\|v_0\|_{L^\infty}$, $\|w_0\|_{L^\infty} \leq R$ であれば, $\|u\|_{L^\infty}$, $\|v\|_{L^\infty}$, $\|w\|_{L^\infty} \leq 2R$ が成り立つ.

解が時間大域的に存在するので, 次に解の時間大域的な挙動について考察したい. 実験や数値シミュレーション結果から (RD) には指状の空間パターンを表すような解の存在が期待される. このパターンは燃焼跡において観察されるが, 燃焼跡を調べるには $v(x, y, t)$ の時間大域的な振る舞いを調べればよいと考えられる. したがって $v_\infty(x, y) \equiv \lim_{t\to\infty} v(x, y, t)$ がどのような空間的なパターンを持つのかを調べることが我々の目標である. この第一歩として, まずは $v_\infty$ が存在し領域の至る所で正であることを示す.

**定理 1.** $I = (0, l_x)$ とし, $(u, v, w)$ を (RD) の古典解とする. このとき任意の点 $(x, y) \in I \times \Omega$ に対して $\lim_{t\to\infty} u(x, y, t) = 0$ が成り立つ. また各点 $(x, y) \in I \times \Omega$ で $v_\infty(x, y) = \lim_{t\to\infty} v(x, y, t)$ が存在し, 初期値 $v_0(x, y)$ が正であるような点 $(x, y) \in I \times \Omega$ に対して $v_\infty(x, y) > 0$ が成り立つ.

## 3. 進行波解の非存在について

数値シミュレーションによると, $I = (-\infty, \infty)$ のとき (RD) には $x$ の正の方向に進み, 変数 $y$ には依存しない進行波解の存在が期待される. これはプラナー燃焼と呼ばれる一様な燃焼面を表す. 酸素供給速度, すなわち $\lambda'$ が十分大きいときにはこの進行波解は安定で $\lambda'$ が小さくなるとこの進行波解が不安定化し空間的なパターンが現れることが実験や数値シミュレーションから示唆されており, この予想が数学的にも正しいことを示したい. そのためにまずは進行波解が存在するようなパラメータ領域を調べ, そのパラメータ領域で進行波解が存在することを示すべきである. そこで進行波解が存在しないようなパラメータ領域に関していくつか結果を得た.

**補題 2.** $a$ が十分大きいとき進行波解は存在しない.

$a$ は熱輻射の効果を表すパラメータであるが, その効果が大きいと熱が逃げてしまい燃焼が持続することが出来ないため進行波解は存在しないと考えられ, 自然な結果である.

**補題 3.** $m = 1$ とする. このとき $\lambda$ には依存しないある $c^*$ が存在して, $c > c^* - \lambda$ を満たす進行速度を持つ進行波解は存在しない.

この補題から非常に速い速度で燃焼が進むようなことはない. さらに, $\lambda > c^*$ であれば進行波解は存在しないこともこの補題から得られる.

## References

[1] S.L.Olson, H.R.Baum, and T.Kashiwagi, *Finger-like smoldering over thin cellulosic sheets in microgravity*, The Combustion Institute, 2525–2533, (1998).
[2] A.Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 44, (1983).
[3] O.Zik, Olami, E.Moses, *Fingering Instability in Combustion*, Phys. Rev. Lett., 81, 3836, (1998).
[4] 嶋市 裕, 微小重力環境における燃焼パターンのシミュレーション解析, 広島大学大学院理学研究科, 2004 年度修士論文.

*E-mail address*: `sa3m04@math.tohoku.ac.jp`

# 退化準線型放物型方程式に対する正則性評価について

水野 将司 (東北大学大学院理学研究科 数学専攻)

本講演では $N$ 次元開球 $B_R := \{x \in \mathbb{R}^N\,;\, |x| < R\}$, $(R > 0)$ に対し, 次の非線型放物型方程式の初期値, 境界値問題

$$
\text{(NP)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \dfrac{u}{\varepsilon}(|\nabla u|^2 - 1) = 0 & \text{in } (0,T) \times B_R \\ u = 0 & \text{on } (0,T) \times \partial B_R \\ u(0) = u_0 & \text{in } B_R \end{cases}
$$

に対する正則性評価, 特に Harnack 不等式の導出について考える. ここで $\varepsilon > 0$ はパラメータである. (NP) の非負値解 $u$ が与えられた時に

$$
\sup_{(t_1,t_2)\times\Omega'} u \le C \inf_{(t_3,t_4)\times\Omega'} u
$$

なる不等式を Harnack 不等式という. ここで「$\varepsilon, t_1, \ldots, t_4$ や $\Omega' \subset\subset \Omega$ がどのような条件の下で得られるか?」や「定数 $C$ が何に依存するか?」, さらには「定数 $C$ は $\Omega'$ や $\varepsilon$, $t_1, \ldots, t_4$ に対してどのような挙動をするか?」は応用上重要な問題になる. 特に Harnack 不等式から解の形状, 解の Hölder 連続性が示されるところは Harnack 不等式を研究する上で重要な結果である. 以下, $C$ を Harnack 定数と呼ぶことにする.

(NP) は次の平均曲率流方程式記述する方程式の近似になっている.

$$
\text{(MMC)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{in } \Omega_T
$$

(MMC) は主要部の最小固有値が消える方向を持っている, すなわち退化した方程式である. 一般には退化した方程式から Harnack 不等式は導けない. だが, 退化していても, Harnack 不等式が成り立つこともあるため (Evans [3] , Lindqvist and Manfredi [5] , Bhattacharya [2]) , Harnack 方程式が成り立つかどうかを調べるためには個々の方程式を調べる必要がある. (NP) は $\varepsilon \to 0$ とすることにより (MMC) を近似した方程式になっている. このことから (NP) に対して Harnack 不等式が成り立つかどうか, 特に Harnack 定数 $C$ の $\varepsilon \to 0$ における挙動を調べることは (MMC) を解析する一つの手段であると考えられる.

退化していない線型の発散型放物型方程式に対し, Moser [6] は Harnack 不等式を示す方法を作った. Moser の方法は非線型方程式についても有効で Aronson and Serrin [1] や Trudinger [7] らによって, 準線型方程式に拡張されている. 今回, (NP) に対して Trudinger の手法を用いて次のような結果を得た.

**定理** (Weak Harnack Inequality)

$N \ge 3$ に対して $0 \le u \le M$ を (NP) の解とする. この時 $\tau > 0$ , $R' < R$ と $p < 0$ に対して, $M$ のみに依存する定数 $\xi \ge M$ が存在して次の評価が成り立つ;

$$
\inf_{(\tau,T)\times B_{R'}} u \ge C_1^{1/p} C_2 C_3 \|u\|_{L^p((0,T)\times B_R)},
$$

ここで $C_1 > 0$ は $N$ にのみ依る定数であり,

$$
C_2 := \exp\left(-\frac{M\xi(N+2)}{2|p|\varepsilon}\right), \; C_3 := \left(\frac{1}{(R-R')^2} + \frac{1}{\tau}\right)^{-(N+2)/2|p|}.
$$

(NP) の非線型項である $u|\nabla u|^2$ は解の減衰をひきおこす項になっているので, Harnack の不等式の導出には $\inf u$ を下から持ち上げる評価が問題になってくる. 以下, 証明の概略として非線型項の処理の方法と, Iteration を与える不等式の導出について説明する. $b_0 := M/\varepsilon$ とし, $\eta$ は適当な cut-off function とする. (NP) に $\phi := \eta^2 e^{-b_0 u} u^{p-1}$ をかけて Laplacian の項について部分積分する.

$$\nabla\phi = 2\eta e^{-b_0 u} u^{p-1}\nabla\eta + \eta^2 e^{-b_0 u}((p-1)u^{-p-2} - b_0 u^{-p-1})\nabla u$$

となり, $-\eta^2 e^{-b_0 u} b_0 u^{p-1}\nabla u$ の項によって, 非線型項 $u|\nabla u|^2$ の積分をキャンセルさせることができる. 従って

$$f(u) := |p| \int_u^\infty e^{-b_0 s} s^{-|p|-1}\, ds$$

とおくと, 局所 Energy 不等式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|p|}\iint \partial_t(\eta^2 f(u))\, dxdt + \frac{|p|+1}{2} e^{-b_0 M} \iint \eta^2 u^{-|p|-2} |\nabla u|^2\, dxdt \\ &\le \frac{2}{|p|+1}\iint u^{-|p|}|\nabla\eta|^2\, dxdt + \frac{2}{|p|}\iint \eta|\partial_t\eta| u^{-|p|}\, dxdt. \end{aligned} \tag{1}$$

が得られる. $u^{-|p|}$ の可積分を上げるために次の補題を用いる.

**補題** (Ladyženskaja の不等式) $N \ge 3$ に対し

$$V((0,T)\times\Omega) := L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\|u\|_{V((0,T)\times\Omega)} := \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$$

とおくと, $u \in V((0,T)\times\Omega)$ に対し $u \in L^{2(N+2)/N((0,T)\times\Omega)}$ であり

$$\|u\|_{L^{2(N+2)/N)}((0,T)\times\Omega)} \le C\|u\|_{V((0,T)\times\Omega)}$$

が成り立つ. 但し, 定数 $C$ は $N$ にのみ依存する.

先の Energy 不等式 (1) と Ladyženskaja の不等式から $0 < \tau_0 < \tau_1 < \tau$, $R' < R_1 < R_0 < R$ に対して cut-off function を適当に選ぶことにより, 次の不等式が得られる.

$$\left\|u^{-|p|/2}\right\|^2_{L^{2(N+2)/N}((\tau_1,T)\times B_{R_1})} \le Ce^{b_0\xi}\delta \left\|u^{-|p|/2}\right\|^2_{L^2((\tau_0,T)\times B_{R_0})}.$$

但し $C$ は $N$ にのみ依る定数, $\delta$ は $\tau_0, \tau_1, R_0, R_1$ にのみ依る定数, $\xi$ は $M$ にのみ依る定数である. これにより積分範囲を狭めるかわりに $u^{-|p|/2}$ の可積分性を上げることができる. この不等式を繰り返し用いることで $\sup u^p$ を $\|u\|_p$ で評価することができる.

## References


[1] D. G. Aronson and J. Serrin, Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations, Arch. Ration. Mech. Math. **25**(1967), 81-122

[2] T. Bhattacharya, An elementary proof of the Harnack inequality for non-negative infinity-superharmonic functions, Electron. J. Differential Equations, **2001**(2001) No.44, 1-8

[3] L. C. Evans, Estimates for smooth absolutely minimizing Lipschitz extensions, Electron. J. Differential Equations, **1993**(1993) No.3 , 1-9

[4] D. Gilberg and N. S. Trudinger, "*Elliptic partial differetial equations of second order*", Springer-Verlag, (2001) Reprint of the 1998 edition

[5] P. Lindqvist and J. J. Manfredi, The Harnack inequality for ∞-harmonic functions, Electron. J. Differential Equations, **1995**(1995) No.4, 1-5

[6] J. Moser, A Harnack inequality for parabolic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **17**(1964), 101-134

[7] N. S. Trudinger, Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math. **21**(1968), 205-226


*E-mail address*: sh5m16@math.tohoku.ac.jp

# 多重井戸型ポテンシャルによる ALLEN–CAHN 型の方程式の特異極限について

大塚 岳 (東京大学大学院数理科学研究科 研究拠点形成特任研究員)

次の反応拡散方程式の特異極限について考える。

$$(1)\qquad u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} f_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,T).$$

ここで $f_\varepsilon$ は

$$(2)\qquad f_\varepsilon(u) = -\sin u - \varepsilon a(1+\cos u)$$

で与えられる関数であり、$a$ は定数とする。方程式 (1) は次のエネルギー汎関数

$$E_\varepsilon(\varphi) = \int \left( \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} F_\varepsilon(\varphi) \right) dx$$

の $L^2$ 勾配流として得られる方程式である。ここで $F_\varepsilon = \int f_\varepsilon = \cos u - \varepsilon a(u + \sin u)$ である。

非線形項が $f_\varepsilon(u) = 2u(u^2-1)$ であるとき、方程式 (1) は Allen–Cahn 方程式と呼ばれる。このとき $F_\varepsilon = (u^2-1)^2/2$ はふたつの極小点 $u = \pm 1$ を持つ。Allen–Cahn 方程式において、内部遷移層と呼ばれる解 $u^\varepsilon$ の値が $-1$ から $1$ へと移り変わる幅 $O(\varepsilon)$ の層が、$\varepsilon \to 0$ としたとき平均曲率流方程式にしたがって動く界面に収束することが知られている。Rubinstein、Sternberg、Keller は漸近展開による形式的な計算でこの関係を示した ([RSK])。Chen は古典解の理論で、Evans、Soner、Souganidis は粘性解の理論で $u^\varepsilon$ が $1$ もしくは $-1$ に収束する点の集合について、平均曲率流方程式の解を用いた特徴づけを与えた ([C],[ESS])。ここでは Allen–Cahn 方程式の非線形項と同様の構造が多数見られる関数 (2) を導入する。エネルギー汎関数における $F_\varepsilon = \int f_\varepsilon$ は無数の極小点 $(2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$ を持つ。それゆえ複数の内部遷移層が得られることが予想される。本講演では (1) における複数の内部遷移層の挙動について考察する。

方程式 (1) において、初期値 $u^\varepsilon(x,0) = u_0(x)$ には

$$(3)\qquad -\pi < u_0 < 3\pi,\ \inf_{\mathbb{R}^N} u_0 < 0,\ \sup_{\mathbb{R}^N} u_0 > 2\pi$$

を仮定する。これはもし $|u_0| < \pi$ とすると比較原理から $|u^\varepsilon| \le \pi$ がしたがい、Allen–Cahn 方程式と本質的に同じ問題となるからである。仮定 (3) を課すと内部遷移層として解の値が $-\pi$ から $\pi$ へ移り変わる層と、$\pi$ から $3\pi$ へと移り変わる層が得られる。形式的な漸近展開から駆動力項つきの平均曲率流方程式の等高線方程式

$$(4)\qquad u_t - |\nabla u| \left\{ \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} + A \right\} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,T)$$

が導出される。ここで $A$ は $a$ にのみ依存する定数である。したがって (1) の内部遷移層は (4) にしたがって動く界面 $\{x;\ u(t,x) = z\}$ に収束すると考えられる。本講演の目標はこの予想を厳密に証明することである。

以下に本講演の主結果を述べる。なお本講演ではとくに断らない限り、解はすべて粘性解の意味で考える。

**Theorem 1.** 初期値 $u_0$ は有界かつ一様連続であり、(3) を仮定する。関数 $u^\varepsilon$、$u$ はそれぞれ初期値を $u^\varepsilon(x,0) = u(x,0) = u_0(x)$ とする (1)、(4) の解とする。任意の $t \in [0,T]$ につ

いて、$\{x;\ u(x,t)<0\}\neq\emptyset$、$\{x;\ u(x,t)\in(0,2\pi)\}\neq\emptyset$、$\{x;\ u(x,t)>2\pi\}\neq\emptyset$ を仮定する。このとき任意のコンパクト集合 $K\in\{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T];\ u(x,t)<2\pi k\}$ $(k=0,1)$ について、

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\sup_K u^\varepsilon \leq (2k-1)\pi$$

が成り立つ。同様に任意のコンパクト集合 $K\in\{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T];\ u(x,t)>2\pi k\}$ $(k=0,1)$ について、

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\inf_K u^\varepsilon \leq (2k+1)\pi$$

が成り立つ。

証明の方針は [C] によるごく短時間での解 $u^\varepsilon$ の挙動の評価と、[ESS] による収束の評価を行うための優解、劣解の構成からなる。この問題における本質的な困難は 2 つの種類の内部遷移層が同時に存在するため、[ESS] の方法により構成した解では $\pi$ から $3\pi$ に移り変わる内部遷移層の下からの評価、および $-\pi$ から $\pi$ に移り変わる内部遷移層の上からの評価が出来ないことである。[ESS] では優解を、進行波解の考察から得られる常微分方程式

$$(5)\qquad -q_\varepsilon'' - c_\varepsilon q_\varepsilon' + f_\varepsilon(q_\varepsilon) = 0$$

の解と、界面からの符号つき距離関数から構成する。このとき、たとえば $\pi$ から $3\pi$ に移り変わる内部遷移層を下から評価するためには $q_\varepsilon(-\infty)=-\pi$、$q_\varepsilon(+\infty)=3\pi$ をみたす (5) の解が必要になる。ところが一般にはこのような解は存在しない。この困難を解決するために、[ESS] の手法で $q_\varepsilon(\pm\infty)=\pm\pi$ なる (5) の解から得られた (1) の優解をふたつ用い、“積み上げる” ことによって通常の 2 倍の高さの層を持つ優解を構成する。この “積み上げ” を可能とした最大の要因は、$f_\varepsilon$ が周期的であることである。

## References

[C] X. Chen, Generation and propagation of interface in reaction-diffusion equations, J. Differential Equations, 96(1992), 116–141

[ESS] L. C. Evans, H. M. Soner and P. E. Souganidis, Phase transitions and generalized motion by mean curvature, Comm. Pure Appl. Math., 45(1992), 1097–1123

[RSK] J. Rubinstein, P. Sternberg and J. B. Keller, Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), 116–133

# 反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について

五十嵐 威文（日本大学理工学部・非常勤講師　日本工業大学工学部・非常勤講師）

次の反応拡散方程式系の初期値問題 (IVPS) を考える。

$$
\text{(IVPS)} \begin{cases} u_t = \Delta u + t^{q_1}|x|^{\sigma_1}v^{p_1}, & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ v_t = \Delta v + t^{q_2}|x|^{\sigma_2}u^{p_2}, & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbf{R}^n, \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbf{R}^n, \end{cases}
$$

但し，$p_1, p_2 \geq 1$, $p_1p_2 > 1$, $q_1, q_2 \geq 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, $u_0, v_0 \in BC(\mathbf{R}^n)$ とする。
$a \geq 0$ に対し，次の関数空間を導入する：

$$
I^a = \left\{ \xi \in BC(\mathbf{R}^n); \xi(x) \geq 0, \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \xi(x) < \infty \right\},
$$

$$
I_a = \left\{ \xi \in BC(\mathbf{R}^n); \xi(x) \geq 0, \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \xi(x) > 0 \right\}.
$$

また，ノルム $\|\cdot\|_{\infty,a}$ を

$$
\|\xi\|_{\infty,a} := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \langle x \rangle^a |\xi(x)|
$$

と定義し，$\|\xi\|_{\infty,a} < \infty$ となるような $L^\infty$-関数空間を $L^\infty_a$ とする。但し，$\langle x \rangle^a = (1+|x|^2)^{a/2}$ である。このとき，$I^a \subset L^\infty_a$ となる。さらに，$(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$ とするとき，(IVPS) の時間局所解 $(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) \in L^\infty_{\delta_1} \times L^\infty_{\delta_2}$ が一意的に存在する。但し，

$$
\delta_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 p_1}{p_1p_2 - 1}, \quad \delta_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1 p_2}{p_1p_2 - 1}
$$

である。ここで，

$$
\alpha_1 = \frac{(2+\sigma_1+2q_1) + (2+\sigma_2+2q_2)p_1}{p_1p_2 - 1}
$$

$$
\alpha_2 = \frac{(2+\sigma_2+2q_2) + (2+\sigma_1+2q_1)p_2}{p_1p_2 - 1}
$$

とおいたとき，次の主結果が成り立つ：

**Theorem 1** (時間大域解の非存在).
*Assume that* $(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$, *and* $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq n$. *Then, every nontrivial solution* $(u, v)$ *of* (IVPS) *is not global in time.*

**Theorem 2** (時間大域解の存在).
*Assume that* $(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$, *and* $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} < n$. *Suppose that*

$$
(u_0, v_0) \in I^{a_1} \times I^{a_2} \ \text{with}\ a_1 > \alpha_1,\ a_2 > \alpha_2,
$$

*and that* $\|u_0\|_{\infty,a_1}$ *and* $\|v_0\|_{\infty,a_2}$ *are small enough. Then, every solution* $(u, v)$ *of* (IVPS) *is global in time.*

Theorem 2 は，第 27 回発展方程式若手セミナー [16] で報告済である。

**Theorem 3** (時間大域解の非存在).
*Assume that* $(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$. *Suppose that one of the following four conditions holds:*
(i) $u_0 \in I_{a_1}$ *with* $a_1 < \alpha_1$;
(ii) $v_0 \in I_{a_2}$ *with* $a_2 < \alpha_2$;
(iii) $u_0(x) \geq Me^{-\nu_0|x|^2}$ *for some* $\nu_0 > 0$ *and* $M > 0$ *large enough;*
(iv) $v_0(x) \geq Me^{-\nu_0|x|^2}$ *for some* $\nu_0 > 0$ *and* $M > 0$ *large enough.*
*Then, every solution* $(u, v)$ *of* (IVPS) *is not global in time.*

Theorems 1 and 3 において，第 27 回発展方程式若手セミナー [16] で報告したときは $\sigma_1 < n(p_1 - 1)$, $\sigma_2 < n(p_2 - 1)$ といった $\sigma_1$，$\sigma_2$ の条件が付けられていたが，今回，$\sigma_1, \sigma_2$ の条件を取り外すことができ，結果を上記のように改良することができた。

## References


1. C.Bandle and H.A.Levine, On the existence and nonexistence of global solution of reaction-diffusion equation in sectrial domains, Trans. Amar. Math. Sec. **316** 1989, 595-622.
2. M.Escobedo and M.A.Herrero, Boundness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system, J. Diff. Eqns. **89** 1991, 176-202.
3. H.Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A Math. **16** 1966, 109-124.
4. M.Guedda and M.Kirane, Criticality for some evolution equations, Differential Equations **37** 2001, 540-550.
5. T.Hamada, Nonexistence of global solutions of parabolic equations in conical domains, Tsukuba J. Math. **19** 1995, 15-25.
6. M.Kirane and M.Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications **268**, 2002, 217-243.
7. T.-Y.Lee and W.-M.Ni, Global existence, large time behavior and life span on solutions of semilinear Cauchy problem, Trans. Amer. Math. Soc. **333** 1992, 365-378.
8. K.Mochizuki, Blow-up, life-span and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Adv. Math. Appl. Sci. **48**, World Scientific 1998, 175-198.
9. K.Mochizuki and Q.Huang, Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Methods and Applications of Analysis **5** (2) 1998, 109-124.
10. R.G.Pinsky, Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in $\mathbf{R}^n$, J. Differential Equations **133** 1997, 152-177.
11. Y.-W.Qi, The critical exponents of parabolic equations and blow-up in $\mathbf{R}^n$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **128A** 1998, 123-136.
12. Y.-W.Qi and H.A.Levine, The critical exponent of degenerate parabolic systems, Z.Angew Math. Phys. **44** 1993, 249-265.
13. Y.Uda, The critical exponent for a weakly coupled system of the generalized Fujita type reaction-diffusion equations, Z.Angew Math. Phys. **46** 1995, 366-383.
14. N.Umeda, Blow-up and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Tsukuba J. Math. **27** 2003, 31-46.
15. N.Umeda, Existence and nonexistence of global solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Comm. Appl. Anal. **10** 2006, 57-78.
16. 五十嵐 威文, 反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について, 第 27 回発展方程式若手セミナー報告集, 2006 年 2 月, 153-157.

# 多層からなる棒状媒体に対する非破壊検査の逆問題

永安聖, 中村玄 (北海道大学大学院理学研究院)

幾種類もの媒質が半直線のようにつながってできた棒状媒体を考える (図参照). 各媒質を伝わる波は1次元波動方程式で記述されているとする. そして, 半直線の端点付近の状況は直接観測できるけれども, 端点から遠いところの状況は直接は観測できないとする. このとき, この直接観測することができない情報を推測するために, 非破壊検査と呼ばれる次のような実験を行う: まず, 半直線の端点に人工的に衝撃を起こす. すると, この衝撃によって媒体内を波が伝わる. この波のうち, 端点に跳ね返ってくるものを観測し, この観測したデータから, 端点から遠いところの情報を具体的に再構成することを試みる.

さてここで, 記号を導入し, この問題を定式化する. $h_0 := 0$ と置く. 各 $k = 1, \dots, N-1$ に対し, $h_k$ を $h_k > h_{k-1}$ を満たす正定数とする. 各 $k = 1, \dots, N-1$ に対し, 区間 $(h_{k-1}, h_k)$ を第 $k$ 層と, 又, 区間 $(h_{N-1}, \infty)$ を第 $N$ 層と呼ぶ. 各 $k = 1, \dots, N$ に対し, $a_k$, $b_k$ を正定数とする. $a_k$ は第 $k$ 層を通る波の速度を表し, $b_k$ は第 $k$ 層のインピーダンスを表す. インピーダンスとは, 一言で言うと, 媒質の波を伝える能力を表すパラメータであり, 特に異なる媒質がつながっている場合の波の反射・透過を表す際に大きな役割を果たす. すると, この媒体内を伝わる波の伝播を記述する方程式は次のようになる (尚, 方程式の導出については, 例えば [1] を参照):

$$\text{(W.}k\text{)}\quad (\partial_t^2 - a_k^2 \partial_x^2) u(t,x) = 0, \qquad \begin{array}{ll} h_{k-1} < x < h_k & (k = 1, \dots, N-1), \\ x > h_{N-1} & (k = N), \end{array}$$

$$\text{(O)}\quad u(t,x) \equiv 0, \quad t < 0,$$

$$\text{(B)}\quad \partial_x u(t,x)|_{x=0+0} = \varphi(t) \quad (\text{但し, } \operatorname{supp}\varphi \cap (-\infty, 0) = \emptyset),$$

$$\text{(I.}k\text{)}\quad u(t,x)|_{x=h_k-0} = u(t,x)|_{x=h_k+0} \quad (k = 1, \dots, N-1),$$

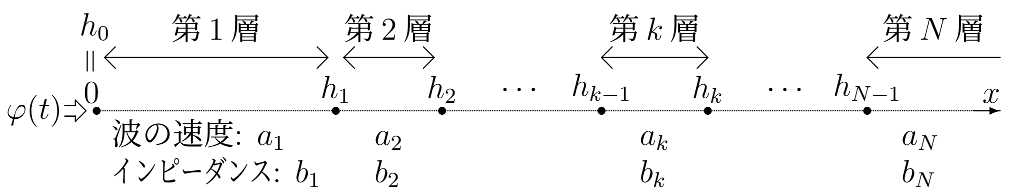
$$\text{(J.}k\text{)}\quad a_k b_k \partial_x u(t,x)|_{x=h_k-0} = a_{k+1} b_{k+1} \partial_x u(t,x)|_{x=h_k+0} \quad (k = 1, \dots, N-1).$$

尚, 方程式 (I.$k$) は, 接合点 $x = h_k$ に於ける波の変位の連続性を, 又, 方程式 (J.$k$) は $x = h_k$ に於ける応力の連続性を表している. そして, この定式化により, 初めに述べた問題の既知データ, 未知データは夫々

・既知データ: $a_1$, $b_1$, $\varphi(t)$ (人工的な衝撃), $u(t,0)$ (観測データ),

・未知データ: $N$ (層の数), $a_k, b_k$ $(k = 2, \dots, N)$, $h_k$ $(k = 1, \dots, N-1)$

となる. この問題は, 普通に「偏微分方程式を解く」のとは異なり, 「偏微分方程式の解の一部が与えられているときに, 方程式の係数等を決める」問題である. このような問題は**逆問題**と呼ばれている. これに対し, 係数が全て既知であるとして偏微分方程式の解の性質について議論する問題は**順問題**と呼ばれている. さて, 次の主結果は, 第1層の情報が既知であるときに, 端点 $x = 0$ での時間 $T$ の間の観測データから, その観測時間の長さ $T$ に応じて, 端点に近い方の層から, そのインピーダンス $b_{k+1}$ 及びその層の幅と波の速度と



の比 $(h_k - h_{k-1})/a_k$ が順々に再構成できる, ということを表している.

**主結果.** $a_1$, $b_1$ は既知であるとする. $b_j \neq b_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, N-1)$ とする. $T > 0$ とする. $\varphi \in L^1(-\infty, T)$ は $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, T)$ を満たすとし, 更にある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して $\int_{-\infty}^{\varepsilon} \varphi(s)ds \neq 0$ が成立するとする. 観測データ $v(t) := u(t, 0)$ が $[0, T)$ 上で与えられたとする. ここで, $u(t, x)$ は方程式 (W.1)–(W.$N$), (O), (B), (I/J.1)–(I/J.$N-1$) の解を表す. このとき, 定数 $b_{k+1}$, $(h_k - h_{k-1})/a_k$ $(1 \leq k \leq N_0 - 1)$ が次の方法により再構成できる.

**手順 1.** $v_1(t) := -a_1 \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \varphi(s)ds - v(t)$ と置く.

**手順 $k$+1 ($k$=1,2,...).** $[0, T)$ 上 $v_k(t) \equiv 0$ ならば再構成終了, このときの $k$ が上の $N_0$ に対応する: $v_{N_0}(t) \equiv 0$. 一方, $v_k(t) \not\equiv 0$ ならば, 次の手続きを実行する:

- $t_k := \inf\{t \in [0, T) : v_k(t) \neq 0\}$ と置く.
- 次のように $(h_k - h_{k-1})/a_k$, $b_{k+1}$ を再構成:

$$\frac{h_k - h_{k-1}}{a_k} := \frac{t_k}{2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_j - h_{j-1}}{a_j},$$

$$b_{k+1} = \frac{2^{2k-1} a_1 \displaystyle\prod_{j=1}^{k-1} \frac{b_j b_{j+1}}{(b_j + b_{j+1})^2} - \lim_{t \to t_k + 0} \frac{v_k(t)}{\int_{-\infty}^{t-t_k} \varphi(s)ds}}{2^{2k-1} a_1 \displaystyle\prod_{j=1}^{k-1} \frac{b_j b_{j+1}}{(b_j + b_{j+1})^2} + \lim_{t \to t_k + 0} \frac{v_k(t)}{\int_{-\infty}^{t-t_k} \varphi(s)ds}} b_k.$$

- $v_{k+1}(t) := v_k(t) + g^{(k)}\left(t; a_1; b_1, \ldots, b_{k+1}; \dfrac{h_1}{a_1}, \dfrac{h_2 - h_1}{a_2}, \ldots, \dfrac{h_k - h_{k-1}}{a_k}; T\right)$ と置き, 次の手順に進む. ここで, $g^{(k)}$ は,

$$\begin{aligned} & g^{(k)}\left(t; a_1; b_1, \ldots, b_{k+1}; \frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2 - h_1}{a_2}, \ldots, \frac{h_k - h_{k-1}}{a_k}; T\right) \\ & = -2a_1 \sum_{\substack{0 \leq m_l < \infty \ (1 \leq l \leq k), \\ \sum_{j=1}^{k} (m_j + 1) \frac{h_j - h_{j-1}}{a_j} \leq \frac{T}{2}}} \psi_{k+1}(m_1, \ldots, m_k; b_1, \ldots, b_{k+1}) \\ & \qquad \times \int_{-\infty}^{t - 2\sum_{j=1}^{k} (m_j + 1) \frac{h_j - h_{j-1}}{a_j}} \varphi(s)ds \end{aligned}$$

という形をしており, $\psi_{k+1}$ の明示的な表示も得られているが, ここでは割愛する ($\psi_{k+1}$ の明示的な定義は [2] でなされている).

尚, 永安は, 実験の際の人工的な衝撃を, 端点から少し離した第 1 層内部のある点でのデルタ関数とした場合の結果 [2] を得ていたが, 今回, その人工的な衝撃を**真に**端点で起こし, しかもその衝撃はデルタ関数に限らない, より一般の関数で記述される衝撃であったとしても, 1 回の実験により, 半直線の内部の情報を再構成することができたことにも注意しておく.

## References

[1] 長岡洋介, 振動と波, 裳華房, 1992.

[2] S. Nagayasu, *An inverse problem for the one-dimensional wave equation in multi-layer media*, preprint.

# 破壊現象の数理モデル

大塚 厚二 (広島国際学院大学　情報学部)

## 1. はじめに

製造工程や加工において無視できない不連続面 (亀裂) が存在する．この初期亀裂 $\mathcal{C}$ が危険であることは少なく，外力や熱応力，体積力などの繰返しによる亀裂の安定成長 $\mathcal{C}(t)$ が危険な寸法 $\mathcal{C}(t_0) = \mathcal{C}_c$ に成長することで脆性破壊と呼ばれる不安定成長が起きる (例えば [2] 参照)．ここでは，物体が線形弾性変形理論の範囲内で破断に至る脆性破壊現象の数理モデルについて概略を述べる．詳細は “http://grb.cs.hkg.ac.jp/~ohtsuka/” で見ていただきたい．

## 2. 滑らかな亀裂進展

議論を単純にするため不連続面は２つの媒介変数 $y_1$, $y_2$ によって

$$\mathcal{C} = \{x = (x_1, x_2, x_3) |\, x = \vec{\psi}(y_1, y_2),\, \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)\,, (y_1, y_2) \in D\}$$

と表現でき，亀裂静止形状，亀裂縁および時間 $t$ に関して $C^\infty$ 級であるとする．以下の議論は，局所座標系を取ることで一般的な曲面でも同様な議論が展開できる．ここで，$D$ は滑らかな縁をもつ２次元領域である．曲面 $\mathcal{C}$ を含む曲面 $S = \{x |\, x = \vec{\psi}(y_1, y_2), (y_1, y_2) \in D_0\}$, $D \subset D_0$ に沿って亀裂は進展すると仮定する ($S \subset \Omega$).

$\mathcal{C}$ の曲面 $S$ 上の**滑らかな亀裂進展** $\Pi(\mathcal{C} \mid S)$ を次で定義する．

- **(SC1):** 初期亀裂先端 $\partial\mathcal{C}$ の点 $\gamma$ $\quad (t = 0)$ が，時刻 $t > 0$ に仮想亀裂の先端 $\partial\mathcal{C}(t)$ の点 $\phi(t, \gamma)$ に移ったと考える．写像 $\phi(t) : \gamma \mapsto \phi(t, \gamma)$ は時刻 $t$ についても，亀裂縁の点 $\gamma$ に関しても滑らかで，１対１であるとする．
- **(SC2):** 亀裂は進展している（$\lim_{t\to+0} t^{-1} |\mathcal{C}(t) - \mathcal{C}| \neq 0$ ）．

弧長 $s$ を媒介変数として，亀裂縁は $\partial\mathcal{C} = \{\vec{\psi}(s) |\, 0 \le s \le L_{\mathcal{C}}\}$,

$$\vec{\psi}(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)), \quad \psi_i(s) = \psi_i(y_1(s), y_2(s)),\, i = 1, 2, 3$$

の形に表現されているとする．点 $x \in S$ における $S$ の単位法線ベクトル $\vec{\nu}$ 及び $\gamma \in \partial\mathcal{C}$ における接ベクトル $\vec{\psi}'(\gamma)$, $\gamma = \vec{\psi}(s_0)$ を

$$\vec{\nu}(x) = \frac{\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial y_1}(x) \times \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial y_2}(x)}{\left|\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial y_1}(x) \times \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial y_2}(x)\right|}, \qquad \vec{\psi}'(\gamma) = \frac{d\vec{\psi}}{ds}(s_0)$$

で定義する．点 $\gamma \in \partial\mathcal{C}$ において，$\vec{e}_2(\gamma) = \vec{\nu}(\gamma)$, $S$ の接ベクトル $\vec{e}_1(\gamma)$ を $\mathcal{C}$ に対して外向単位ベクトルで $\vec{e}_2(\gamma)$ と $\vec{\psi}'(\gamma)$ とに垂直に取り，$\vec{e}_3(\gamma)$ を $\vec{\psi}'(\gamma)$ または $-\vec{\psi}'(\gamma)$ に等しく取ることで $\{\vec{e}_1(\gamma), \vec{e}_2(\gamma), \vec{e}_3(\gamma)\}$ が直交座標系となるようにできる．曲面 $S$ の $\vec{\nu}$ 方向を $+$, 反対面を $-$ と向き付けておく．

亀裂縁の点 $\gamma \in \partial\mathcal{C}$ でのベクトル $\phi'(0, \gamma)$ の $\vec{e}_1(\gamma)$ 成分を点 $\gamma$ における**亀裂進展速度**と呼び $V_{\mathcal{C}}(\gamma)$ で表す．すなわち $V_{\mathcal{C}}(\gamma) = \phi'(0, \gamma) \cdot \vec{e}_1(\gamma)$ で，$V_{\mathcal{C}}(\gamma)\vec{e}_1(\gamma)$ を亀裂縁 $\partial\mathcal{C}$ における**亀裂進展速度場**と呼ぶことにする．次が成り立つ [1].

$$|V_{\mathcal{C}}| = \lim_{\tau\to 0} t^{-1} |\mathcal{C}(t) - \mathcal{C}|,\, |V_{\mathcal{C}}| = \int_0^{L_{\mathcal{C}}} V_{\mathcal{C}}(\vec{\psi}(s)) d\gamma(s), \quad V_{\mathcal{C}} \ge 0,$$

## 3. 変分問題

変位ベクトル $\vec{u}(t)$ はエネルギー汎関数

(1) $$\mathcal{E}(\vec{v};\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}(t)})=\int_{\Omega_{\mathcal{C}(t)}}\left\{E(\vec{v})-\vec{f}\cdot\vec{v}\right\}dx-\int_{\Gamma_N}\vec{g}\cdot\vec{v}\,ds$$

を関数空間

$$V(\Omega_{\mathcal{C}(t)})=\left\{\vec{v}\in H^1(\Omega_{\mathcal{C}(t)})^3 |\ \Gamma_D\text{で } \vec{v}=0\right\}$$

で最小にする元として求まる．ここで，$\varepsilon_{ij}(\vec{v})=(\partial_j v_i+\partial_i v_j)/2$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ は微小歪，$E(\vec{v})=\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\vec{v})\varepsilon_{kl}(\vec{v})$ は歪エネルギー密度関 Lax-Milgram 定理と Korn の不等式により最小元の存在が言える [1]..

仮想的な亀裂進展 $\mathcal{C}(\cdot)\in\Pi(\mathcal{C}|S)$ を考える．亀裂進展部分 $\mathcal{C}(t)\setminus\mathcal{C}$ では $[\![\vec{v}]\!]=0$ なので $\vec{v}\in H(\Omega_{\mathcal{C}})$ となり，包含関係 $H(\Omega_{\mathcal{C}})\subset H(\Omega_{\mathcal{C}(t)})$ が成り立ち，初期亀裂状態 $\vec{u}$ と仮想亀裂進展後の状態 $\vec{u}(t)$ とにエネルギー不等式

(2) $$\mathcal{E}(\vec{u};\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}})=\min_{\vec{v}\in V(\Omega_{\mathcal{C}})}\mathcal{E}(\vec{v};\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}})\geq\min_{\vec{w}\in V(\Omega_{\mathcal{C}(t)})}\mathcal{E}(\vec{w};\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}(t)})=\mathcal{E}(\vec{u}(t);\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}(t)})$$

が成り立つ．エネルギー差 $\mathcal{E}(\vec{u};\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}})-\mathcal{E}(\vec{u}(t);\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}(t)})$ が亀裂を成長させるエネルギーであるという Griffith の考えを，Irwin が改良して，亀裂進展における単位面積増加あたりのエネルギー解放量

(3) $$\mathcal{G}(\mathcal{L},\mathcal{C}(\cdot))=\lim_{t\to+0}\frac{\mathcal{E}(\vec{u};\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}})-\mathcal{E}(\vec{u}(t);\mathcal{L},\Omega_{\mathcal{C}(t)})}{|\mathcal{C}(t)\setminus\mathcal{C}|}$$

を亀裂進展力と考えて**エネルギー解放率**と呼ぶことにした．ここで，$|\mathcal{C}(t)\setminus\mathcal{C}|$ は曲面 $\mathcal{C}(t)\setminus\mathcal{C}$ の面積を表す.

**定理 3.1.** 仮想亀裂進展 $\mathcal{C}(\cdot)\in\Pi(\mathcal{C}|S)$ に対し

(4) $$\mathcal{G}(\mathcal{L},\mathcal{C}(\cdot))=J_\omega(\vec{u},\vec{X}_{\mathcal{C}})|V_{\mathcal{C}}|^{-1}$$

ここで，$\omega\subset U(\partial\mathcal{C})$ は亀裂縁 $\partial\mathcal{C}$ を含む開近傍で，$\vec{X}_{\mathcal{C}}=(X^1_{\mathcal{C}},X^2_{\mathcal{C}},X^3_{\mathcal{C}})$ は亀裂進展速度場を $U(\partial\mathcal{C})$ において亀裂面及びその垂直方向に平行移動して拡張したベクトル場．一般 $J$積分 $J_\omega(\vec{u},\vec{X}_{\mathcal{C}})$ を次で定義する．

(5) $$\begin{aligned}J_\omega(\vec{u},\vec{X}_{\mathcal{C}}) &= P_\omega(\vec{u},\vec{X}_{\mathcal{C}})+R_\omega(\vec{u},\vec{X}_{\mathcal{C}})\\ P_\omega(\vec{u},\vec{X}_{\mathcal{C}}) &= \int_{\partial\omega}\left\{E(x,\vec{u})(\vec{X}_{\mathcal{C}}\cdot\vec{n})-\sigma_{ij}(\vec{u})n_j(\vec{X}_{\mathcal{C}}\cdot\nabla u_i)\right\}ds,\\ R_\omega(\vec{u},\vec{X}_{\mathcal{C}}) &= \int_{\omega\cap\Omega_{\mathcal{C}}}\left\{\sigma_{ij}(\vec{u})\partial_j X^k_{\mathcal{C}}\partial_k u_i-(\vec{X}_{\mathcal{C}}\cdot\nabla_x)E(x,\vec{u})\right.\\ &\qquad\left.-\vec{f}(\vec{X}_{\mathcal{C}}\cdot\nabla\vec{u})-E(x,\vec{u})\mathrm{div}\vec{X}_{\mathcal{C}}\right\}dx.\end{aligned}$$

ここで，$\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$ は $\partial\omega$ の外向き単位法線ベクトルである．

## References

[1] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and three dimensional fracture mechanics I, Hiroshima Math. J., 11(1981), 21–52.
[2] 岡村弘之, 線形破壊力学入門, 培風館, 1976.

*E-mail address*: ohtsuka@hkg.ac.jp

# 半線形熱方程式の空間無限遠での爆発とそのプロファイル

下條 昌彦（東大・数理）

本講演では，半線形熱方程式に対する初期値問題

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

を考え，解が無限遠で爆発するという現象を論じる．ここで空間次元 $N$ は任意であり，非線形項 $f$ には次の増大度の条件を仮定する．

$$(2)\qquad \Big(\frac{f}{\log f}\Big)' > 0, \quad \Big(\frac{f}{\log f}\Big)'' > 0 \quad (\sigma \gg 1), \qquad \int_1^\infty \frac{\log f(\sigma)}{f(\sigma)}\,d\sigma < \infty.$$

例えば，次の増大度をもつ関数はこの条件を満たしている．

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u(\log(1+u))^b} = \infty \quad (b > 2).$$

まず，初期値問題 (P) の解がある時刻 $T = T(u_0, v_0)$ で**爆発する**とは，

$$\limsup_{t\nearrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \infty.$$

が成り立つことをいう．解が時刻 $T$ で爆発するとき，点 $a \in \mathbb{R}^N$ がその**爆発点**であるとは，適当な点列 $x_m \to a$ と $t_m \nearrow T$ に対して $|u(x_m,t_m)| \to \infty$ が成り立つことを意味する．我々は爆発点の全体を**爆発集合**と呼び，それを $B(u_0)$ と記す．また,「無限遠でのみ爆発する」とは，解は爆発するが $B(u_0) = \emptyset$ となることをいう．これは，任意の有界集合 $K$ に対して次が成り立つことを意味する．

$$\limsup_{t\to T(u_0)} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(K)} < \infty$$

このとき，極限 $u(x,T) := \lim_{t\to T} u(x,t)$ が存在して $\mathbb{R}^N$ 上の $C^2$ 級関数となる．これを爆発時刻における解のプロファイルと呼ぶ.

空間無限遠での爆発に関する先駆的な結果として，空間 1 次元単独方程式の場合に Lacey [3] は半直線上の初期境界値問題の解に対して無限遠のみで爆発する例を示した．また，Giga-Umeda [1] は高次元の単独方程式 $u_t = \Delta u + u^p$ の初期値問題を扱い，初期値 $u_0$ がある定数 $M > 0$ に対して $0 \le u_0 \le M$, $u_0(x) \to M$ $(|x| \to \infty)$ をみたすときに無限遠のみでの爆発が起こることを示した．また，下條は [1] の結果を改良し，より広いクラスの初期値に対して無限遠のみでの爆発が起こることを示した [4]．より詳しく述べれば次を示した.

(H1) ある定数 $M > 0$ に対して $0 \le u_0 \le M, u_0 \not\equiv M$.
(H2) ある点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \|u_0 - M\|_{L^1(B_{R_n}(a_n))} = 0$$

ならば，以下が成立する．

(i) $T := T(u_0) = T(M)$
(ii) $B(u_0) = \emptyset$（無限遠のみでの爆発）
(iii) $\lim_{n\to\infty} u(a_n, T) = \infty$.

その後 Giga-Umeda [2] は，この結果をある $p>1$ に対して $f(\sigma)/\sigma^p \to \infty$ $(\sigma \to \infty)$ が成り立つ場合に拡張した．さらに，発表者と東京大学の俣野博教授は，その結果が (2) の下でも成り立つことを証明した（[5] 参照）．

一方，これまでのところ爆発時刻での解のプロファイルや，爆発後の挙動に関しては何も言及されていなかった．そこで我々は解のプロファイルの空間遠方での増大度に，ある上限があることを証明した．また，爆発後の "延長解" は $\mathbb{R}^N$ のすべての点で値が発散することも示すことができたのでそれらの結果について紹介する（[5] 参照）．以下 $\varphi(s)$ は次の微分方程式の解とする:

$$\dot{\varphi} = -f(\varphi)\ (s>0), \quad \lim_{s \searrow 0} \varphi(s) = \infty.$$

たとえば，$f(u) = u^p\,(p>1)$ ならば

$$\varphi(s) = (p-1)^{-1/(p-1)} s^{-\frac{1}{p-1}} \quad (0<s<\infty)$$

であり，$f(u) = e^{au}$ $(a>0)$ ならば次の関数である．

$$\varphi(s) = -\frac{1}{a}\log(as) \quad (0<s<1/a).$$

**主定理** (General upper bound and Lower bound). (i) ある $\gamma \in (0,1)$ と $L>0$ があって $f^\gamma$ が $[L,\infty)$ 上で凸とする．(H1) と $T(u_0) = T(M)$ を満たす任意の $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ と $\varepsilon>0$ に対して，ある $C>0$ があって

$$u(x,T) \le \varphi\Big(C\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4(T(M)-\varepsilon)}\Big)\Big).$$

(ii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して (H1) と $T(u_0) = T(M)$ を満たす初期値 $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ があってある $C>0$ に対して

$$u(x,T) \ge \varphi\Big(C\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4(T(M)+\varepsilon)}\Big)\Big).$$

(iii) ある程度，緩やかな増大度の関数 $\rho(x)$ に対し，(H1) と $T(u_0) = T(M)$ を満たす初期値 $u_0$ があって

$$\frac{u(x,T)}{\rho(x)} \to 1 \quad (|x| \to \infty).$$

証明には適当な優解と劣解を構成する．それらをうまく用いることにより，我々の結果は統一的に得ることができる．

## References


[1] Y. Giga and N. Umeda, *On blow up at space infinity for semilinear heat equations*, To appear in J.Math.Anal.Appli

[2] Y. Giga and N. Umeda, *Blow up directions at space infinity for solutions of semilinear heat equations*, Preprint

[3] A. A. Lacey, *The form of blow-up for nonlinear parabolic equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** (1984), no. 1-2, 183-202.

[4] M.Shimojō 半線形熱方程式の空間無限遠での解の爆発現象とその局所性, 東京大学数理科学研究科修士論文（2004）

[5] H.Matano, M.Shimojō, *The global profile of blow-up at space infinity in semilinear heat equations* , Preprint



東京都中野区新井 1 − 31 − 13

*E-mail address*: shimojyo@ms.u-tokyo.ac.jp

# BLOW-UP DIRECTIONS FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

関　行宏 (東大・数理)

次のような準線形放物型方程式に対する初期値問題の非負の爆発解について考える.

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta\phi(u) + f(u), & x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

ただし, $\phi, f \in C^1([0,\infty)) \cap C^\infty((0,\infty))$, $\phi(\xi) > 0, \phi'(\xi) > 0, \phi''(\xi) \geq 0, f(\xi) > 0$ for $\xi > 0, \phi(0) = 0$ とし, さらに, $f$ について

$$\int_1^\infty \frac{d\xi}{f(\xi)} < \infty$$

を仮定する. これは (1) の解が有限時間で爆発するための必要条件である. また, $u_0 \in BC(\mathbf{R}^N)$ は非負のものを考える. 典型的な例として

$$(PM) \quad \phi(\xi) = \xi^m,\ f(\xi) = \xi^p \qquad (m \geq 1, p > 1)$$

が挙げられる. 初期値問題 (1) は時間局所的な一意解を持ち, さらに初期値を適当に選べば解は有限時間で爆発する. 即ち, (1) の有界な解が存在するような最大時間を $t_b(u_0)$ とすると, $t_b(u_0) < \infty$ かつ $\lim_{t\uparrow t_b(u_0)} ||u(\cdot,t)||_\infty = \infty$ が成り立つ. このとき, $u$ は時刻 $t_b(u_0)$ で爆発すると言い, $t_b(u_0)$ を $u$ の爆発時刻と呼ぶ.

本講演では, **最小時間で爆発する解**について論じたい. このような解を説明するために, $M = \|u_0\|_\infty$ とおいて次の常微分方程式を考える:

$$(2) \qquad v' = f(v) \quad (t > 0), \qquad v(0) = M.$$

(2) の解 $v_M(t)$ は時刻 $T_M := t_b(M) = \int_M^\infty d\xi/f(\xi)$ で爆発する. 比較定理によって全ての (1) の解 $u$ に対して $u(x,t) \leq v_M(t)$ となり, 従って常に $t_b(u_0) \geq T_M$ である. そこで, $t_b(u_0) = T_M$ が成り立つとき, (1) の解 $u$ は最小時間で爆発すると定義し, その爆発時刻を**最小爆発時刻**と呼ぶことにする.

**定理 1.** $u$ を最小爆発時刻を持つ (1) の解とする. このとき, 次が成り立つ:
(i)$\|u(\cdot,t)\|_\infty = \lim_{R\to\infty} \sup_{|x|\geq R} u(x,t) = v_M(t) \quad \text{in } t \in [0, T_M)$.
(ii)$u$ は無限遠のある方向に爆発する. 即ち, 次のような点列 $\{(x_n, t_n)\} \subset \mathbf{R}^N \times (0, T_M)$ と方向 $\psi \in S^{N-1}$ が存在する:

$$|x_n| \to \infty, \frac{x_n}{|x_n|} \to \psi, t_n \uparrow T_M \text{ and } u(x_n, t_n) \to \infty \text{ as } n \to \infty.$$

Giga-Umeda [3] は $\phi(\xi) = \xi, f(\xi) = \xi^p$ の場合に定数でない初期値が無限遠で最大値をとれば, 解は最小爆発時刻を持ち, 無限遠でのみ爆発することを証明した. Seki [5] はこの結果を $(PM), p > m$ の場合へ拡張した. 定理 1 (ii) に現れる $\psi \in S^{N-1}$ を $u$ の**爆発方向**と呼ぶ. Giga-Umeda [4] は $\phi(\xi) \equiv \xi$ の場合に (1) の解が最小時間で爆発するための初期値に対する十分条件を与え,解の爆発方向を特徴付けた. 我々の目的は一般の $\phi$ に対して (1) の解が最小時間で爆発するための初期値に対する必要十分条件を求め, またその解の爆発方向を特徴付けることである. そのために, 次のような $u_0$ の重み付き平均 $A_\rho$ を導入する:

$$(3) \qquad A_\rho(x) = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x-y)\rho(y)dy, \quad \rho(y) = \Big(\int_{\mathrm{R}^N} e^{-|x|}dx\Big)^{-1} e^{-|y|}.$$

次の条件が爆発方向の判定に極めて有用である.

$(A)_\psi$ 次の条件を満たす点列 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}^N$ が存在する:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{|x_n|} = \psi \ \text{ and } \lim_{n\to\infty} A_\rho(x_n) = M.$$

**定理 2.** ある $\psi \in S^{N-1}$ に対して, 初期値 $u_0$ は条件 $(A)_\psi$ を満たすとする. このとき, (1) の解 $u$ は最小時間で爆発し, $\psi$ は $u$ の爆発方向となる. さらに,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x-x_n|<R} |u(x,t) - v_M(t)| = 0 \quad \text{for each } R > 0 \tag{4}$$

が成り立つ. この収束は $t$ について $(0, T_M)$ で広義一様である.

定理 2 の証明には比較定理の証明に現れる初期値による解の評価と解の同程度連続性 (DiBenedetto [1]) を用いる.

さらに $f$ が $\phi$ に比べて速く増大するという次の条件を仮定すれば, 爆発方向を初期値のプロファイルを使って完全に特徴付けることができる.

$(B)$ 次の条件を満たす $C^2$ 級関数 $\Psi(\eta)$, 定数 $c > 0$, $\eta_1 > 0$ が存在する:

$$\Psi(\eta), \Psi'(\eta), \Psi''(\eta) \geq 0 \quad \text{for } \eta > \eta_1;$$

$$\int_{\eta_1+1}^{\infty} \frac{d\eta}{\Psi(\eta)} < \infty;$$

$$\{f(\phi^{-1}(\eta))\}'\Psi(\eta) - f(\phi^{-1}(\eta))\Psi'(\eta) \geq c\Psi(\eta)\Psi'(\eta) \quad \text{for } \eta > \eta_1.$$

この条件は (PM) の場合については $p > m$ という条件に対応する. Friedman-McLeod [2] に端を発する, 一点爆発を示す論法を応用することにより, 次の定理が得られる.

**定理 3.** 条件 $(B)$ を仮定し, $u$ を最小時間で爆発する (1) の解とする. このとき,

(i)$u_0 \not\equiv M$ ならば $u$ は無限遠でのみ爆発する.

(ii)$\psi \in S^{N-1}$ が $u$ の爆発方向であることと初期値 $u_0$ が条件 $(A)_\psi$ を満たすことは同値である.

以上の結果を用いて, 最小時間で爆発するための初期値 $u_0$ の必要十分条件が得られる.

**定理 4.** 条件 $(B)$ と $u_0 \not\equiv 0$ を仮定する. このとき, (1) の解 $u$ が最小時間で爆発するための必要十分条件は初期値 $u_0$ が $\sup_{x\in\mathbf{R}^N} A_\rho(x) = \|u_0\|_\infty$ を満たすことである.

**注意.** 方程式を (PM) に制限すると, $p > m$ のとき, 最小時間で爆発する解 $u$ は最小爆発時刻において完全爆発することが証明できる. すなわち, $u$ はこの時刻を越えて延長されることはない. これを示すには定理 2 (4) と Suzuki [7] の結果を組み合わせればよい.

## References

[1] E. DiBenedetto, *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation*, Indiana Univ. Math. J. **32**(1983), 83-118.

[2] A. Friedman and B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. **34**(1985), 425-447.

[3] Y. Giga and N. Umeda, *On blow-up at space infinity for semilinear heat equations*, J. Math. Anal. Appl. **316**(2006), 538-555.

[4] Y. Giga and N. Umeda, *Blow-up directions at space infinity for solutions of semilinear heat equations*, Bol. Soc. Paran. Mat. **23**(2005), 9-28.

[5] Y. Seki, *Asymptotic behaivior of solutions to the quasilinear parabolic equations =Blow-up at space infinity and nonblow-up=*, Master's thesis, Chuo University(2006).

[6] Y. Seki, R. Suzuki and N. Umeda, *Blow-up directions for quasilinear parabolic equations*, preprint.

[7] R. Suzuki, *Complete blow-up for degenerate quasilinear parabolic equations,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **130**(2000), 877-908.

*E-mail address*: seki@ms.u-tokyo.ac.jp

# 年齢構造を考慮した流言伝播の数理モデル

河内 一樹 (東京大学数理科学研究科 D1)

本発表では，次の 1 階の非線形偏微分方程式の境界値問題 $(\diamond)$ を扱い，[1] で得られた結果を紹介する．

$$
\begin{aligned}
(\partial_t + \partial_a)x(t,a) &= -\lambda_1(t,a)x(t,a),\\
(\partial_t + \partial_a)y(t,a) &= \lambda_1(t,a)\theta(a)x(t,a) - \lambda_2(t,a)y(t,a),\\
(\partial_t + \partial_a)z(t,a) &= \lambda_1(t,a)(1-\theta(a))x(t,a) + \lambda_2(t,a)y(t,a),\\
x(t,0) = 1, \quad y(t,0) &= 0, \quad z(t,0) = 0,\\
\lambda_1(t,a) &= \int_0^\omega \alpha(a,\sigma)c(\sigma)y(t,\sigma)\,d\sigma,\\
\lambda_2(t,a) &= \int_0^\omega c(\sigma)\{\beta(a,\sigma)y(t,\sigma) + \gamma(a,\sigma)z(t,\sigma)\}\,d\sigma.
\end{aligned}
$$

最初に，年齢による異質性を考慮した人口における，流言の伝播を記述するモデルを紹介する．そして，そのモデルの挙動を調べる上で，規格化などを行うことで $(\diamond)$ に帰着されることを示す．

次に，$(\diamond)$ をある Banach 空間上の半線形 Cauchy 問題に書き換え，それを用いて解の well-posedness について議論する．

そして，$\omega > 0$ を最高年齢として，$L^1(0,\omega)$ 上の有界線形作用素 $\tilde{T}$ を次のように定める：

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{T}u)(a) := \int_0^\omega \phi_1(a,b)u(b)\,db, \quad u \in L^1(0,\omega),\\
&\text{where } \phi_1(a,b) := \theta(b)\int_b^\omega \alpha(a,\sigma)c(\sigma)\,d\sigma.
\end{aligned}
$$

$\tilde{T}$ のスペクトル半径 $R_0 = r_\sigma(\tilde{T})$ と 1 との大小関係によって $(\diamond)$ の解の挙動が大きく異なることを示す．

具体的に述べると次のようである．$R_0 < 1$ ならば，任意の $(\diamond)$ の解が $t \to \infty$ で $(x,y,z) = (1,0,0)$ なる自明解に収束する．$R_0 > 1$ ならば，$(\diamond)$ は非自明な定常解を持ち，$R_0$ が 1 に十分近ければ，自明解から分岐した非自明定常解は局所漸近安定である．

さらに，$R_0 > 1$ ならば，ある種の persistence が成り立つ．すなわち，初期データによらない定数 $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$
\liminf_{t\to\infty} \int_0^\omega y(t,a)\,da > \varepsilon \quad \text{whenever} \quad \int_0^\omega y(0,a)\,da > 0
$$

が成り立つ．数理生物学などの分野で最近注目を集めている persistence の概念について簡単に説明し，この結果を導くために必要となるアイデアを紹介する．

## References

[1] K. Kawachi, Deterministic Models for Rumor Transmission (submitted)

*URL*: http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kkawachi/
*E-mail address*: kkawachi@ms.u-tokyo.ac.jp