特別講演

特異拡散方程式とその応用

儀我美一 （東大数理）

特異拡散方程式は、拡散係数が無限大になりうる拡散方程式を表す総称である。例えば $p-$ ラプラシアン $\Delta_p u = \operatorname{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ による熱方程式は $1 \le p < 2$ のとき特異拡散方程式である。本講演で考える方程式はこの $p = 1$ に対応するクラスであり、形式的には偏微分方程式であるが、未知関数の時間微分が空間の無限小の量だけでは決まらない、非局所性を持つものである。問題の起源をいくつか述べる。

(i) **結晶成長の問題から：**Γ_t の時刻 t をパラメーターとする。Γ_t の単位ベクトル $\mathbf{n}$ 方向の成長速度を V とする。Γ_t は例えば結晶表面を表すとする。界面支配モデルの例として曲率流方程式

$$V = -M(\mathbf{n})(\operatorname{div}_{\Gamma_t}\nabla\gamma(\mathbf{n}) + C(x,t)) \tag{1.1}$$

は $C = 0$ の場合、金属の antiphase 粒界の運動の記述によく用いられる。ここで γ は表面エネルギーを表し、$\mathbf{R}^n$ 上の正斉次１次の凸関数とする。この量は結晶構造により定められているので既知とする。M は動的係数で正とし、既知とする。C は結晶を成長させる駆動力である。div は Γ_t 上での発散を表す。γ が C^2 級で M が連続かつ C が連続かつ x についての微分 $\nabla_x C$ が局所有界であれば、(1.1）の初期値関数は少なくとも時間大域的に広義解（等高面法による解 $\{\Gamma_t\}$ ）を持つことが知られている [5]。しかし J. Taylor [16] や S. Angenent-M. Gurtin [2] が提唱したクリスタラインエネルギーの場合は γ は区分的１次であり C^1 ですらない。この時（1.1）は（非局所的）特異拡散方程式である。今のところ C が定ベクトルで空間次元 $n = 2$ の時のみ等高面法による解が一意存在することが知られているだけで [3]、一般の場合はまだ未解決である。最近３次元の場合 G. Bellettini らのグループにより $M = \gamma$ で $C \equiv 0$ の場合、初期曲面が凸の場合に解の存在が示された。論文 [3] のアプローチは粘性解論を用いるもので Bellettini らのは変分法を用いるものである。

(ii) **画像処理の問題：**画像のノイズを取る問題で全変動流方程式つまり

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\,(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + \lambda(f-u)\ \lambda > 0$$

が用いられることがある。f は既知関数とする。u は画像の濃淡を表す関数である。もともと L. I. Rudin-S. Osher-E. Fatemi [13] により提唱された。この種の問題は劣微分方程式論や非線形半群論を用いることによって存在、一意性等が研究されている。例えば [1]、[11]。ここでもし u がベクトル値で $|u| = 1$ という束縛をつけると全変動流方程式は $1-$ 調和写像流方程式となり

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\,(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + |\nabla u|u$$

となる。こちらはカラー画像の色調からノイズを取る一方式である [15]。この方程式については定義域が１次元の場合 [7] に時間大域解の存在が区分的定数の初期値について示されているが、高次元の場合は局所解の存在が初期エネルギーが小さく、初期値自身滑らかな場合に示せただけである [6]。その離散モデルの研究も行われている [8]。

(iii) **多結晶の金属粒の平均的な方向場の動きについて：**これは小林氏ら [12] によって提唱されたモデルで、全変動流が用いられている。ここでも値域は $\mathbf{R}$ よりも $\mathbf{S}^1$

であったりするので 1– 調和写像流の研究が欠かせない。その他、白川氏 [14] により別のタイプの束縛のついた全変動流も研究されている [10]。

(iv) **衝撃波の等高面法による計算：**バーガーズ方程式の解 $y = u(x,t)$ のグラフをそのまま xy 平面での曲面の運動と思って変形させると、関数のグラフとはみなせなくなってしまう。垂直方向 y だけの特異拡散を導入することにより等高面法により不連続解をとらえることが可能になった。本講演ではこの点を [4] や [17] にそって主に述べる。

(v) **雪結晶成長を記述するステファン問題への応用：**これは P. Rybka と著者との一連の共同研究による。例えばサーベイ論文 [9] を参照。(1.1) が外場と連立されているモデルである。本講演ではこれについても簡単にふれる。

References

[1] F. Andrew-Vaillo, V. Caselles and J. M. Mázon, Existence and uniqueness of a solution for a parabolic quasilinear problem for linear growth functionals with L^1-data, *Math. Ann*, **322**, (2002), 139-206.

[2] S. B. Angenent and M. E. Gurtin, Multiphase thermomecharics with interfacial structure 2, Evolution of an isothermal interface, *Arch. Rational Mech. Anal*, **108**, (1989), 323-391.

[3] M.-H. Giga and Y. Giga, Generalized motion by nonlocal curvature in the plane, *Arch Rational Mech. Anal*, **159**, (2001), 295-333.

[4] M.-H. Giga and Y. Giga, Minimal vertical singular diffusion preventing overturing for the Burgers equation, *Recent Advances in Scientific Computing and Partial Differential Equations, Contemp. Math. Amer. Math. Soc. Providence*, **330**, (2003), 73-88.

[5] Y. Giga, Surface Evolution Equations - a level set approach, *Birkhauser*, (2006).

[6] Y. Giga, Y. Kashima and N. Yamazaki, Local solvability of a constrained gradient system of total variation, *Abstract and Applied Analysis*, **8**, (2004), 651-682.

[7] Y. Giga and R. Kobayashi, On constrained equations with singular diffusivity, *Methods and Applications of Analysis*, **10**, (2003), 253-278.

[8] Y. Giga, H. Kuroda and N. Yamazaki, An existence result for a discretized constrained gradient system of total variation flow in color image processing, *Interdisciplinary Information Sciences*, **11**, (2005), 199-204.

[9] Y. Giga and P. Rybka, Faceted crystals grown from solution - a Stefan type problem with a singular interfacial energy, *Hokkaido Univ. Preprint Series in Math*, **#753**, (2005). http://eprints.math.sci.hokudai.ac.jp/

[10] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation function with constraint, *Nonlinear Anal*, **46**, (2001), 435-455.

[11] R. Kobayashi and Y. Giga, Equations with singular diffusivity, *J. Stat. Phys*, **95**, (1999), 1187-1220.

[12] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, A continuum model of grain boundaries, *Physica D*, **140**, (2000), 141-150.

[13] L. I. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, **60**, (1992), 259-268.

[14] K. Shirakawa, Parabolic variational inequality associated with the total variation functional, *Nonlinear Anal*, **47**, (2001), 3195-3206.

[15] B. Tang, G. Sapiro and V. Caselles, Color image enhancement via chromaticity diffusion, *IEEE Trans on Image Processing*, **10**, (2001), 701-707.

[16] J. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry, *in Differential Geometry, B. Lawson and K. Tanenblat, eds., Proceedings of the Conference on Differential Geomerty, Rio de Janeiro, Pitman Monograph Surveys Pure Appl. Math*, **52**, (1991), 321-336.

[17] Y.-H. R. Tsai, Y. Giga and S. Osher, A level set approach for computing discontinuous solutions of a class of Hamilton-Jacobi equations, *Math. Comp*, **72**, (2003), 159-181.