消散的 TIMOSHENKO 系の解の減衰評価と漸近挙動について

井手　健太郎　(九州大学大学院数理学府)
川島　秀一　(九州大学大学院数理学研究院)

1.Introduction

次の消散的 Timoshenko 系を考える。

$$(DT) \quad \begin{cases} w_{tt} - (w_x - \psi)_x = 0, \\ \psi_{tt} - \sigma(\psi_x)_x - (w_x - \psi) + \gamma\psi_t = 0, \end{cases}$$

ただし、$\sigma'(0), \gamma > 0$ とする。(DT) を線形化すると、

$$(LDT) \begin{cases} w_{tt} - (w_x - \psi)_x = 0, \\ \psi_{tt} - a^2\psi_{xx} - (w_x - \psi) + \gamma\psi_t = 0. \end{cases}$$

ただし、$a^2 = \sigma'(0)$ $(a > 0)$ とおいた。

この方程式系は物理学的には、Timoshenko beam と呼ばれる梁の振動を表現している。消散項のない本来の Timoshenko 系についての考察 Taylor [1],Taylor-Yau [2] で詳しく記述されているように、梁の中心からの距離を変数 x にとると、w は x 軸方向に対する鉛直方向の梁の変位を表し、ψ は梁の回転角度の変位を表している。

消散的 Timoshenko 系については、Rivera-Racke [3] の、次のような興味深い結果がある。(彼らは有限区間 $0 < x < L$ 上で、境界条件 $w = 0, \psi_x = 0$ の場合を考えた。) それは、$a = 1$ ならば解のエネルギーは指数的に減衰するのに対し、$a \neq 1$ であれば指数的減衰が起こらず多項式的に減衰するという結果である。つまり、伝播速度によって消散構造に違いがあるのだ。

また、原本 [4] は $-\infty < x < \infty$ 上で消散的 Timoshenko 系の消散構造を考察し、$a = 1$ ならば熱方程式と同様の多項式的減衰をし、$a \neq 1$ ならば可微分性の損失を伴う形での多項式的減衰をするという結果を得た。実は後者は、有限区間における $a \neq 1$ 場合の Rivera-Racke [3] の結果と同じである。

今回は、まず $a \neq 1$ の場合の原本 [4] の結果を紹介し、さらにその精密化について話す。

2. Main Result

以下、$a \neq 1$ を仮定する。系 (LDT) において $u = w_t, v = w_x - \psi, y = \psi_t, z = a\psi_x$ と変数変換し、ベクトル表示すると、

$$(*) \qquad U_t + AU_x + LU = O$$

となる。ただし、

$$U = \begin{pmatrix} v \\ u \\ z \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

いま、

$$\Phi(i\xi) = -(i\xi A + L), \qquad (e^{t\Phi}\varphi)(x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{t\Phi(i\xi)}\hat{\varphi}(\xi)](x)$$

とおくと、$e^{t\Phi}$ は $(*)$ の半群を生成する。すなわち、$U_0 = {}^t(v_0, u_0, z_0, y_0)$ を初期値とする $(*)$ の解は $U(t) = e^{t\Phi}U_0$ で与えられる。

このとき、

$$e^{t\Phi(i\xi)} = \sum_{j=1}^{4} e^{t\lambda_j(i\xi)} P_j(i\xi)$$

と表される。ここで、λ_j は固有値、P_j は射影行列である。
　まず始めに、原本 [4] の結果を述べる。

Theorem 1(原本 [4]). $t \in (0, \infty)$, $k, l = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、次の評価が成立する。

$$\|\partial_x^k e^{t\Phi}\varphi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-(\frac{1}{4}+\frac{k}{2})}\|\varphi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\varphi\|_{L^2}.$$

Theorem 1 の証明において、$e^{t\Phi(i\xi)}$ に対する次の Lemma 1 が重要になる。

Lemma 1(原本 [4]). $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ に対し、次の評価が成立する。

$$|e^{t\Phi(i\xi)}| \le Ce^{-c\rho(\xi)t}. \qquad ただし、\quad \rho(\xi) = \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

次に、

$$e^{t\Phi_0(i\xi)} = \sum_{j=1}^{2} e^{t\lambda_j^0(i\xi)} \Pi_j$$

とおく。ただし、$\lambda_j^0(i\xi) = -\kappa_j \xi^2, \quad \kappa_j = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4a^2}}{2}, \quad \Pi_j = E_{2,3}\, P_j^{(0)}\, {}^tE_{2,3}$,
$P_j^{(0)}$ は $P_j(i\xi)$ の ξ の 0 次の項 , $j = 1, 2$,

$$E_{2,3} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 2. $t \in (0, \infty)$, $k, l = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、次の評価が成り立つ。

$$\|\partial_x^k(e^{t\Phi} - {}^tE_{2,3}\, e^{t\Phi_0} E_{2,3})\varphi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-(\frac{3}{4}+\frac{k}{2})}\|\varphi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\varphi\|_{L^2}.$$

Theorem 2 の証明では、Lemma 1 と次の Lemma 2 を用いる。

Lemma 2. $|\xi| \le r$ のとき $t \in (0, \infty)$ に対し、次の評価が成り立つ。

$$|e^{t\Phi(i\xi)} - {}^tE_{2,3}\, e^{t\Phi_0(i\xi)} E_{2,3}| \le C|\xi|e^{-c\xi^2 t} + Ce^{-ct}.$$

References

[1] S.Taylor, A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability, Jounal of Conputational and Applied Mathematics, 114 (2000), 23-40.
[2] S.Taylor and S.Yau, Boundary control of a rotating Timoshenko beam, ANZIAM Jounal, 44(E) (2003), 143-184.
[3] J.E. Muñoz Rivera and R. Racke, Global Stability for damped Timoshenko systems, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 9 (2003), 1625-1639.
[4] 原本和夫、Timoshenko 系の解の漸近挙動、修士論文 (九州大学数理学府)、2005 年.