反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について

五十嵐 威文（日本大学理工学部・非常勤講師　日本工業大学工学部・非常勤講師）

次の反応拡散方程式系の初期値問題 (IVPS) を考える。

$$
\text{(IVPS)} \begin{cases} u_t = \Delta u + t^{q_1}|x|^{\sigma_1}v^{p_1}, & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ v_t = \Delta v + t^{q_2}|x|^{\sigma_2}u^{p_2}, & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbf{R}^n, \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbf{R}^n, \end{cases}
$$

但し，$p_1, p_2 \geq 1$, $p_1p_2 > 1$, $q_1, q_2 \geq 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, $u_0, v_0 \in BC(\mathbf{R}^n)$ とする。
$a \geq 0$ に対し，次の関数空間を導入する：

$$
I^a = \left\{ \xi \in BC(\mathbf{R}^n); \xi(x) \geq 0, \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \xi(x) < \infty \right\},
$$

$$
I_a = \left\{ \xi \in BC(\mathbf{R}^n); \xi(x) \geq 0, \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \xi(x) > 0 \right\}.
$$

また，ノルム $\|\cdot\|_{\infty,a}$ を

$$
\|\xi\|_{\infty,a} := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \langle x\rangle^a |\xi(x)|
$$

と定義し，$\|\xi\|_{\infty,a} < \infty$ となるような L^∞-関数空間を L^∞_a とする。但し，$\langle x\rangle^a = (1+|x|^2)^{a/2}$ である。このとき，$I^a \subset L^\infty_a$ となる。さらに，$(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$ とするとき，(IVPS) の時間局所解 $(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) \in L^\infty_{\delta_1} \times L^\infty_{\delta_2}$ が一意的に存在する。但し，

$$
\delta_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 p_1}{p_1p_2 - 1}, \quad \delta_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1 p_2}{p_1p_2 - 1}
$$

である。ここで，

$$
\alpha_1 = \frac{(2+\sigma_1+2q_1) + (2+\sigma_2+2q_2)p_1}{p_1p_2 - 1}
$$

$$
\alpha_2 = \frac{(2+\sigma_2+2q_2) + (2+\sigma_1+2q_1)p_2}{p_1p_2 - 1}
$$

とおいたとき，次の主結果が成り立つ：

Theorem 1 (時間大域解の非存在).
Assume that $(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$, *and* $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq n$. *Then, every nontrivial solution* (u, v) *of* (IVPS) *is not global in time.*

Theorem 2 (時間大域解の存在).
Assume that $(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$, *and* $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} < n$. *Suppose that*

$$
(u_0, v_0) \in I^{a_1} \times I^{a_2} \text{ with } a_1 > \alpha_1,\ a_2 > \alpha_2,
$$

and that $\|u_0\|_{\infty,a_1}$ *and* $\|v_0\|_{\infty,a_2}$ *are small enough. Then, every solution* (u, v) *of* (IVPS) *is global in time.*

Theorem 2 は，第 27 回発展方程式若手セミナー [16] で報告済である。

Theorem 3 (時間大域解の非存在).
Assume that $(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$. *Suppose that one of the following four conditions holds:*
(i) $u_0 \in I_{a_1}$ *with* $a_1 < \alpha_1$;
(ii) $v_0 \in I_{a_2}$ *with* $a_2 < \alpha_2$;
(iii) $u_0(x) \geq Me^{-\nu_0|x|^2}$ *for some* $\nu_0 > 0$ *and* $M > 0$ *large enough;*
(iv) $v_0(x) \geq Me^{-\nu_0|x|^2}$ *for some* $\nu_0 > 0$ *and* $M > 0$ *large enough.*
Then, every solution (u, v) *of* (IVPS) *is not global in time.*

Theorems 1 and 3 において，第 27 回発展方程式若手セミナー [16] で報告したときは $\sigma_1 < n(p_1 - 1)$, $\sigma_2 < n(p_2 - 1)$ といった σ_1，σ_2 の条件が付けられていたが，今回，σ_1, σ_2 の条件を取り外すことができ，結果を上記のように改良することができた。

References

1. C.Bandle and H.A.Levine, On the existence and nonexistence of global solution of reaction-diffusion equation in sectrial domains, Trans. Amar. Math. Sec. **316** 1989, 595-622.
2. M.Escobedo and M.A.Herrero, Boundness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system, J. Diff. Eqns. **89** 1991, 176-202.
3. H.Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A Math. **16** 1966, 109-124.
4. M.Guedda and M.Kirane, Criticality for some evolution equations, Differential Equations **37** 2001, 540-550.
5. T.Hamada, Nonexistence of global solutions of parabolic equations in conical domains, Tsukuba J. Math. **19** 1995, 15-25.
6. M.Kirane and M.Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications **268**, 2002, 217-243.
7. T.-Y.Lee and W.-M.Ni, Global existence, large time behavior and life span on solutions of semilinear Cauchy problem, Trans. Amer. Math. Soc. **333** 1992, 365-378.
8. K.Mochizuki, Blow-up, life-span and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Adv. Math. Appl. Sci. **48**, World Scientific 1998, 175-198.
9. K.Mochizuki and Q.Huang, Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Methods and Applications of Analysis **5** (2) 1998, 109-124.
10. R.G.Pinsky, Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in $\mathbf{R}^n$, J. Differential Equations **133** 1997, 152-177.
11. Y.-W.Qi, The critical exponents of parabolic equations and blow-up in $\mathbf{R}^n$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **128A** 1998, 123-136.
12. Y.-W.Qi and H.A.Levine, The critical exponent of degenerate parabolic systems, Z.Angew Math. Phys. **44** 1993, 249-265.
13. Y.Uda, The critical exponent for a weakly coupled system of the generalized Fujita type reaction-diffusion equations, Z.Angew Math. Phys. **46** 1995, 366-383.
14. N.Umeda, Blow-up and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Tsukuba J. Math. **27** 2003, 31-46.
15. N.Umeda, Existence and nonexistence of global solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Comm. Appl. Anal. **10** 2006, 57-78.
16. 五十嵐 威文, 反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について, 第 27 回発展方程式若手セミナー報告集, 2006 年 2 月, 153-157.