微小重力環境でのすす燃焼パターンの反応拡散モデルについて

池田幸太 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)
三村昌泰 (明治大学理工学部数学科)

1. 導入

近年, 微小重力環境における燃焼の伝播は地上のそれとは異なり, 燃焼過程で指状のパターンが現れることが実験によって観察された ([1]). 微小重力環境下では対流の効果が小さく地上と比べ酸素が供給されにくいためこのような現象が起こると考えられている. また微小重力環境下でなくとも対流効果を無視できる実験において酸素の供給速度が小さければ, 一定速度一定濃度で一様に窒素と酸素の混合気体を供給し, かつ一様な着火をしたにもかかわらず燃焼は必ずしも一様に進行せず, 燃焼面の一様性が破れ, 供給速度に依存して定性的に異なる３つの空間的なパターンが燃焼跡に現れることが別の実験によって観察された ([3]).

この現象を理論的に調べるため, 次のモデル方程式が導出されている ([4]):

$$
\text{(RD)}\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = & L_e\Delta u + \lambda\dfrac{\partial u}{\partial x} + \gamma k(u)vw - au^m, \quad (x,y)\in I\times\Omega, t>0,\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} = & -k(u)vw, \quad (x,y)\in I\times\Omega, t>0,\\
\dfrac{\partial w}{\partial t} = & \Delta w + \lambda'\dfrac{\partial w}{\partial x} - k(u)vw, \quad (x,y)\in I\times\Omega, t>0.
\end{cases}
$$

ここで u, v, w はそれぞれ温度, 紙の密度, 酸素と窒素の混合気体濃度を表し, $k(u) = exp(-1/u)$ はアレニウス則から得られる非線形項である. $I \subset (-\infty,\infty)$ は $(0, l_x)$, $(-\infty,\infty)$ のいずれかであり, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界領域とする. また (RD) に含まれるパラメータはそれぞれ $L_e, a, \gamma > 0$, $m \geq 1$, $\lambda, \lambda' \geq 0$ を満たすとする.

u が満たすべき境界条件について述べる. $I = (0, l_x)$ であれば $(x,y) \in \partial I\times\Omega, t > 0$ で u は Neumann 境界条件を満たすとする. 一方 $I = (-\infty,\infty)$ の場合は任意の $y \in \Omega, t > 0$ に対して u は $\lim_{|x|\to\infty} u(x,y,t) = 0$ を満たすとする. またいずれの場合も $(x,y) \in I\times\partial\Omega, t > 0$ に対して u は Neumann 境界条件を満たすとする. 次に w が満たすべき境界条件について述べる. $I = (0, l_x)$ であれば $y \in \Omega, t > 0$ に対して $\partial w/\partial x(0,y,t) = 0$ 及び $w(l_x,y,t) = w_R$ を満たすとする. ここで $w_R > 0$ は右端からの供給濃度を表す定数である. 一方 $I = (-\infty,\infty)$ の場合は任意の $y \in \Omega, t > 0$ に対して w は $\lim_{x\to\infty} w(x,y,t) = w_R$ 及び, $\lim_{x\to-\infty} w(x,y,t) = w_L$ を満たすとする. ここで $w_L > 0$ は定数である. またいずれの場合も $(x,y) \in I\times\partial\Omega, t > 0$ に対して w は Neumann 境界条件を満たすとする.

初期値は $u(x,y,0) = u_0(x,y) \geq 0$, $v(x,y,0) = v_0(x,y) \geq 0$, $w(x,y,0) = w_0(x,y) \geq 0$ を満たすとする.

(RD) は一定速度一定濃度で一様に酸素を供給する状況を表す. 数値シミュレーションから, 供給速度を表すパラメータ λ' の値が大きいときには燃焼界面に摂動を加えても時間が十分に経過すれば再び燃焼界面は一様に進行すること, 徐々に λ' の値を小さくしていくと燃焼界面の不安定化が起こり燃焼界面は波状になること, さらに λ' の値を小さくしていくと指状の空間パターンが燃焼跡に現れることを示される. 我々の目的はこれらの数値シミュレーション結果の数学的保証を与えることであるが, 今回はその第一歩である.

2. 時間大域的な解の存在とその挙動

初期値が適当な滑らかさや可積分性を持つとき (RD) に古典解が一意的かつ時間大域的に存在することが示される．まず時間局所的な解の存在は解析的半群を用いて示すことができ, 例えば [2] を参照されたい．一方時間大域的な解の存在については次の補題から得られる．

補題 1. 初期値 u_0, v_0, w_0 に対してある十分大きな定数 $R > 0$ が存在して, $\|u_0\|_{L^\infty}$, $\|v_0\|_{L^\infty}$, $\|w_0\|_{L^\infty} \leq R$ であれば, $\|u\|_{L^\infty}$, $\|v\|_{L^\infty}$, $\|w\|_{L^\infty} \leq 2R$ が成り立つ.

解が時間大域的に存在するので, 次に解の時間大域的な挙動について考察したい．実験や数値シミュレーション結果から (RD) には指状の空間パターンを表すような解の存在が期待される．このパターンは燃焼跡において観察されるが, 燃焼跡を調べるには $v(x,y,t)$ の時間大域的な振る舞いを調べればよいと考えられる．したがって $v_\infty(x,y) \equiv \lim_{t\to\infty} v(x,y,t)$ がどのような空間的なパターンを持つのかを調べることが我々の目標である．この第一歩として, まずは v_∞ が存在し領域の至る所で正であることを示す.

定理 1. $I = (0, l_x)$ とし, (u,v,w) を (RD) の古典解とする．このとき任意の点 $(x,y) \in I \times \Omega$ に対して $\lim_{t\to\infty} u(x,y,t) = 0$ が成り立つ．また各点 $(x,y) \in I \times \Omega$ で $v_\infty(x,y) = \lim_{t\to\infty} v(x,y,t)$ が存在し, 初期値 $v_0(x,y)$ が正であるような点 $(x,y) \in I \times \Omega$ に対して $v_\infty(x,y) > 0$ が成り立つ.

3. 進行波解の非存在について

数値シミュレーションによると, $I = (-\infty, \infty)$ のとき (RD) には x の正の方向に進み, 変数 y には依存しない進行波解の存在が期待される．これはプラナー燃焼と呼ばれる一様な燃焼面を表す．酸素供給速度, すなわち λ' が十分大きいときにはこの進行波解は安定で λ' が小さくなるとこの進行波解が不安定化し空間的なパターンが現れることが実験や数値シミュレーションから示唆されており, この予想が数学的にも正しいことを示したい．そのためにまずは進行波解が存在するようなパラメータ領域を調べ, そのパラメータ領域で進行波解が存在することを示すべきである．そこで進行波解が存在しないようなパラメータ領域に関していくつか結果を得た.

補題 2. a が十分大きいとき進行波解は存在しない.

a は熱輻射の効果を表すパラメータであるが, その効果が大きいと熱が逃げてしまい燃焼が持続することが出来ないため進行波解は存在しないと考えられ, 自然な結果である.

補題 3. $m = 1$ とする．このとき λ には依存しないある c^* が存在して, $c > c^* - \lambda$ を満たす進行速度を持つ進行波解は存在しない.

この補題から非常に速い速度で燃焼が進むようなことはない．さらに, $\lambda > c^*$ であれば進行波解は存在しないこともこの補題から得られる.

References

[1] S.L.Olson, H.R.Baum, and T.Kashiwagi, *Finger-like smoldering over thin cellulosic sheets in microgravity*, The Combustion Institute, 2525–2533, (1998).

[2] A.Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 44, (1983).

[3] O.Zik, Olami, E.Moses, *Fingering Instability in Combustion*, Phys. Rev. Lett., 81, 3836, (1998).

[4] 嶋市 裕, 微小重力環境における燃焼パターンのシミュレーション解析, 広島大学大学院理学研究科, 2004 年度修士論文.

E-mail address: `sa3m04@math.tohoku.ac.jp`