LARGE TIME BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO THE GENERALIZED BURGERS EQUATIONS

加藤　正和 (大阪大学大学院 理学研究科)

次の一般化された Burgers 方程式

$$u_t + (f(u))_x = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2}$$

の大域解の漸近挙動について考える．ここで, $u_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $f(u) = \frac{b}{2}u^2 + \frac{c}{3}u^3$, $b \neq 0$ かつ $c \in \mathbb{R}$ とする．また, $\beta \in [0,1]$ に対して, $L^1_\beta(\mathbb{R}) \equiv \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) | \int_{\mathbb{R}} |u|(1+|x|)^\beta dx < \infty\}$ とおく．[1] において, 以下で定義する非線型散逸波

$$\chi(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+t}}\chi_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

に (1), (2) の解が漸近する事が示された．ここで,

$$\chi_*(x) \equiv \frac{1}{b}\frac{(e^{b\delta/2}-1)e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi} + (e^{b\delta/2}-1)\int_{x/2}^\infty e^{-y^2}dy}, \quad \delta \equiv \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx.$$

具体的には, ある $\beta \in (0,1)$ に対して $u_0 \in L^1_\beta(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ であって, $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さければ

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1+\frac{1-\beta}{2}}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1_\beta}), \quad t \geq 0$$

が成り立つ事が示された．更に, [2] において, 初期値が遠方で十分速く減衰しているとき

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}\log(2+t), \quad t \geq 0 \tag{3}$$

が成り立つ事が Hopf-Cole 変換を用いて示されている．

本研究の目的は, $\delta c \neq 0$ の時, (3) の評価の最適性を示すことである．実際, 解の漸近形の第２項 $V(x,t)$ は以下で与えられる:

$$V(x,t) \equiv -\frac{cd}{12\sqrt{\pi}}V_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)t^{-1}\log(2+t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ここで,

$$V_*(x) \equiv (b\chi_*(x) - x)e^{-\frac{x^2}{4}}\eta_*(x),$$
$$\eta_*(x) \equiv \exp\left(\frac{b}{2}\int_{-\infty}^x \chi_*(y)dy\right), \quad d \equiv \int_{\mathbb{R}} \eta_*^{-1}(y)\chi_*^3(y)dy.$$

$E_{1,\beta} \equiv \|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1_\beta}$ とおく．今回, 得られた結果は以下の通りである．

定理 1. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ を仮定する．このとき, $E_{1,0}$ が十分小さければ, (1), (2) の大域解 $u \in C^0([0,\infty); H^1)$, $\partial_x u \in L^2(0,\infty; H^1)$ が一意的に存在する．更に, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ かつ $E_{1,1}$ が十分小さいと仮定すると, 次の減衰評価

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le CE_{1,1}(1+t)^{-1}, \quad t \ge 0 \tag{4}$$

が成り立つ.

定理 1 の証明では, 以下の線形微分方程式に対する解の表現と減衰評価が重要な役割を果たす:

$$z_t = z_{xx} - (b\chi z)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$z(x,0) = z_0(x). \tag{6}$$

ここで

$$\eta_1(x,t) \equiv \eta_* \left(\frac{x}{\sqrt{1+t}} \right), \quad \eta_2(x,t) \equiv \eta_1^{-1}(x,t), \quad G(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{x^2}{4t}}$$

とおく.

補題 2.

$$U[w](x,t,\tau) = \int_{\mathbb{R}} \partial_x (G(x-y,t-\tau)\eta_1(x,t))\eta_2(y,\tau) \int_{-\infty}^{y} w(\xi) d\xi dy,$$
$$0 \le \tau < t, \quad x \in \mathbb{R},$$

とおくと、(5), (6) の解は以下で与えられる.

$$z(x,t) = U[z_0](x,t,0), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

命題 3. $\beta \in [0,1]$, $p \in [1,\infty]$, k を正の整数として, $z_0 \in L^1_\beta(\mathbb{R})$ かつ $\int_{\mathbb{R}} z_0(x)dx = 0$ を仮定する．このとき, (5), (6) の解に対して,

$$\|\partial_x^l z(\cdot,t)\|_{L^p} \le Ct^{(1-\frac{1}{p}+\beta+l)/2} \|z_0\|_{L^1_\beta}, \quad t > 0$$

が成り立つ．ここで, $l = 0, 1, \cdots, k$.

[1] S. Kawashima: *Large-time behavior of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.*, **A106** (1987), 164–194.
[2] A. Matsumura and K. Nishihara, 非線形微分方程式の大域解 (圧縮性粘性流の数学解析), 日本評論社, 2004.

大阪府豊中市待兼山町 1 番
E-mail address: smv648km@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp