半線形熱方程式の解の L^q 空間における漸近挙動

川上竜樹 (東北大学大学院理学研究科 D1)

次の半線形熱方程式の Cauchy 問題の解 $u = u(x,t)$ の $t \to \infty$ における漸近挙動を考える:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) & \text{in} \quad \mathbf{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x) \geq 0 & \text{in} \quad \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

ここで $N \geq 1$, $\phi \in L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ であり, $f \in C([0,\infty))$ に対して, ある $[0,\infty)$ 上連続かつ単調増加な関数 $h = h(\tau)$ が存在して,

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\left|\frac{f(\tau)}{\tau}\right| \leq h(\tau) \text{ for all } \tau \in (0,\infty), \\ &\int_\delta^\infty h(\tau^{-\frac{N}{2}})d\tau < \infty \text{ for any } \delta > 0 \end{aligned}$$

を満たすとする．(1) の解 u に対して (2) を満たす f の典型的な例 $f(u) = u^p$, $p > 1 + 2/N$ に対して, 初期値に上と同じ仮定を置くことで, 任意の $q \in [1,\infty]$ に対して,

$$t^{(1-1/q)N/2}||u(\cdot,t) - c_* t^{-\frac{N}{2}}\psi(\cdot,t)||_{L^q(\mathbf{R}^N)} \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

が成立する ([4] を参照)．また, $f(u) = -u^p$, $p > 1 + 2/N$ の場合, 初期値に上と同じ仮定を置くことで,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{N}{2}} \max_{x \in P_a(t)} |u(x,t) - c_*\psi(x,t)| = 0$$

となることが知られている．ここで

$$P_a(t) = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| \leq at^{\frac{1}{2}}\}, \quad a \geq 0, \ t \geq 0$$

である ([3] を参照)．本講演では, 非線形項 $f(u)$ を一般化すると共に, L^q 空間において誤差項の評価を加えたより精密な漸近挙動を得ることを目的とする．

定理 1. (2) を仮定し,

$$\sup_{t>0} ||u(\cdot,t)||_{L^1(\mathbf{R}^N)} < +\infty, \ \lim_{t\to\infty} ||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = 0$$

を満たす (1) の解 u を考える．このとき,

$$(3) \qquad \lim_{t\to\infty} ||(1+2t)^{\frac{N}{2}}u(\cdot,t) - c_*\psi(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = 0$$

が成立する．ここで,

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \\ c_* &= ||\phi||_{L^1(\mathbf{R}^N)} + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^N} f(u)dxdt \end{aligned}$$

である．

さらに, 定理 1 より詳しい漸近挙動として次を得る．

定理 2. 定理1と同じ条件の下で, さらに,

$$\int_{\mathbf{R}^N}(1+|x|^2+|\log\phi(x)|)|\phi(x)|dx<\infty.$$

を仮定する. このとき, 任意の $q\in[1,\infty]$ に対して, ある正定数 C と T が存在して,

$$||(1+2t)^{\frac{N}{2}}u(\cdot,t)-c_*\psi(\cdot,t)||_{L^q(\mathbf{R}^N)}\le Ct^{-\frac{1}{2}}+C\int_t^\infty h(\tau^{-\frac{N}{2}})d\tau \tag{4}$$

が任意の $\in(T,\infty)$ に対して成立する. ここで, 定数 $C=C(\phi,N,q,f)$ である.

この評価によって, 誤差項の評価を加えた減衰評価を得た. 特に $f(u)=0$, $f(u)=u^p$ の場合は (4) の減衰の度合いは最適であることもわかる.

定理1の証明はまず解 u の減衰の度合いと正定数 c_* の存在を比較原理を用いて証明し, 熱方程式の解の表現公式より Gauss 核に収束することを示す. 定理2は [1], [6] で用いられた relative entropy method を改善することによって得られる. 具体的には次の scale 変換を用いる.(1) の解 u に対して v を

$$u(x,t)=(1+2t)^{-\frac{N}{2}}v\left((1+2t)^{-\frac{1}{2}}x,\frac{1}{2}\log(1+2t)\right)$$

と置くと v は

$$\begin{cases} v_s=\mathrm{div}(yv+\nabla v)+e^{(N+2)s}f(e^{-Ns}v) & \text{in } \mathbf{R}^N\times(0,\infty),\\ v(y,0)=\phi(y) & \text{in } \mathbf{R}^N\end{cases} \tag{5}$$

の解である. 証明の方針は (5) の解 v と $v_s=\mathrm{div}(yv+\nabla v)$ の定常解である $G(s)$ との L^1 空間における漸近挙動を求めていくことである. ここで,

$$||G(s)||_{L^1(\mathbf{R}^N)}=M=||\phi||_{L^1(\mathbf{R}^N)}+\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^N}e^{(N+2)s}f(e^{-Ns}v)dyds$$

である. しかし今回は, 非線形項の影響により解の L^1 保存則が崩れているため, [1] や [6] で用いている Csiszar-Kullback の不等式 ([2], [5] を参照) を直接用いることはできない. そのため M を改良し,

$$||G(\cdot,s)||_{L^1(\mathbf{R}^N)}=||\phi||_{L^1(\mathbf{R}^N)}+\int_0^s\int_{\mathbf{R}^N}e^{(N+2)s}f(e^{-Ns}v)dyds$$

かつ $G(y,s)\to G(y)$ as $t\to\infty$ なる $G(y,s)$ を用いて, L^1 保存則を適用できるよう改善した.

References

[1] J. A. Carrillo, G. Toscani, Asymptotic L^1-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 49 (2000), 113-142.

[2] I. Csiszar, Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations, Stud. Sci. Math. Hung., 2 (1967), 299-318.

[3] A. Gmira and L. Veron, Large time behavior of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbf{R}^N$, J. Diff. Eq., 53 (1984), 258-276.

[4] T. Kawanago, Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity, Ann. Ist. Henri. Poincaré., 13 (1996), 1-15.

[5] S.Kullback, A lower bound for dicrimination information in terms of variation, IEEE Trans. Info. Theory, 4 (1967), 126-127.

[6] G. Toscani, Kenetic approch to the asymptotic behavior of the solution to diffusion equations, Rend. Mate. Serie VII, 16 (1996), 329-346.