【特別講演】

亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析

木村 正人 (九州大学 大学院数理学研究院)

1. 亀裂進展におけるエネルギー解放率

弾性体内部を進展する亀裂の挙動を理解するための試みは Griffith [5] に始まったとされ，現在に至るまで，工学・物理・数学などの分野において非常に多くの研究が様々な角度から行われている．破壊力学での Griffith 理論は，亀裂進展力となるエネルギー解放率 G を中心に一般化の試みを経つつ，今でも破壊力学，亀裂進展の数理モデリングとその解析において重要な役割を果たしている (例えば，[4] や [7]–[11] とその参考文献).
慣性項が無視できる範囲で負荷を徐々に変化させたとき，弾性板における直線形状の亀裂が同じ方向に進展するとき，亀裂進展長さに対する解放エネルギーの比率 G が新しい亀裂面を作るための仕事 G_c を越すとき，すなわち $G \geq G_c$ を Griffith [5] は脆性破壊の発生条件とした．そのため，亀裂形状や負荷との関連が明確になる G の数学的表現が必要となる．
エネルギー解放率とは次のように定義される量である．今，$\mathbb{R}^n$ 内の（亀裂のない）有界な弾性体 Ω_* に，$n-1$ 次元亀裂 Σ が入っているものとする．$0 \leq t < T$ をパラメータとする仮想亀裂進展 $\Sigma(t)$ を考える．ここで，$\Sigma = \Sigma(0) \subset \Sigma(t_1) \subset \Sigma(t_2)$ $(0 \leq^\forall t_1 \leq^\forall t_2 < T)$ である．
慣性が無視できる範囲での遅い亀裂進展においては，$\Omega_* \setminus \Sigma(t)$ における弾性エネルギー $E(t)$ は

$$(1) \qquad E(t) := \min_v \int_{\Omega_* \setminus \Sigma(t)} W(x, v(x), \nabla v(x)) dx,$$

で与えられる．ここで，v は与えられた境界条件を満たす変位場であり，
$W(x, v(x), \nabla v(x))$ は静弾性エネルギー（外力がある場合はそれを含むポテンシャルエネルギー）密度である．
そのとき，仮想亀裂進展 $\{\Sigma(t)\}_{0 \leq t < T}$ に伴う，$t = 0$ におけるエネルギー解放率 G は，

$$(2) \qquad G := \lim_{t \to +0} \frac{E(0) - E(t)}{|\Sigma(t) \setminus \Sigma|},$$

で与えられる．$E(t) \leq E(0)$ であることから，もし，この極限が存在すれば，$G \geq 0$ である．
Rice[14] と Cherepanov[2] によるエネルギー解放率の表現（J 積分）は，等方な定数係数線形 2 次元弾性体における直線亀裂の場合の研究で，後に続く研究も 2 次元問題が主であった．Ohtsuka [7]–[10] や Ohtsuka-Khludnev [11] は，弱い非線形楕円型方程式（系）を含む一般次元の曲面亀裂の場合に数学的定式化を行い，エネルギー解放率の存在とその領域積分表現，及び一般 J 積分理論の展開を行った．そこで使われた手法は，形状感度解析のアイデアを用いて仮想亀裂進展を表現し（注意 3.5 を参照），エネルギー最小原理 (1) に基づいて，(2) の右辺に現れる差分を丁寧に評価するものであった．
エネルギー解放率の数学的取り扱いの難しさは，亀裂の先端（縁）における変位場や応力場の解の持つ特異性にある．2 次元問題ではこの特異項の係数は応力拡大係数と呼ばれ，エネルギー解放率は応力拡大係数のみに依存することが証明されている．3 次元問題や変数係数 2 次元問題などでの応力拡大係数に関する数学解析は，現在でも研究が続い

ており未解決な部分も多く残されている．それについては，上記文献や [15], [16] などを参照されたい．

本稿では，[8] における数学的定式化をもとに Lipschitz 連続な領域写像を用いて，その精密化を図り，更に，Fréchet 微分を用いたエネルギー解放率の計算を行い，その領域積分表現を得る．そのための準備として，Banach 空間における抽象的パラメータ付き変分問題の一般論を陰関数定理と Lax-Milgram の定理の応用として展開する．それにより，[8] によるエネルギー解放率の領域積分表現が，パラメータによるエネルギーの 1 階 Fréchet 微分として見通しよく得られるとともに，より弱い条件への精密化・高階エネルギー微分への拡張が得られる．特に，[11] では，領域摂動 $t \to \varphi(t)$ が $C^2([0,T], W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$ のとき，エネルギー解放率の領域積分表現 (5) が証明されているが，ここでは，$C^1([0,T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$ のとき示されたことになり，従来の結果の改良になっている．

本講演は，[12] および [13] の結果に基づくものである．

2. パラメータ付き抽象的変分問題

本節では，Banach 空間における抽象的パラメータ付き変分問題の一般論を展開する．証明は省略し，結果のみ述べる．最小エネルギーのパラメータ微分については，次の定理が基本となる．

定理 2.1. X と M を実 Banach 空間とする．X の部分集合 $\mathcal{U}_0$ と M の開部分集合 $\mathcal{O}_0$ 上で定義された汎関数 $J : \mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0 \to \mathbb{R}$ を考える．各 $\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し，ある $u(\mu) \in \mathcal{U}_0$ があって $J(\cdot, \mu)$ の最小値 $J_*(\mu)$ を与えるものとする．すなわち，

$$J_*(\mu) := \min_{v \in \mathcal{U}_0} J(v, \mu) = J(u(\mu), \mu) \ (\mu \in \mathcal{O}_0).$$

ここで，$u \in C^0(\mathcal{O}_0, X)$ で，$J \in C^0(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0)$ かつ，任意の $v \in \mathcal{U}_0$ に対し $J(v, \cdot) \in C^1(\mathcal{O}_0)$ で，$\partial_M J \in C^0(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$ であるものと仮定すると，そのとき，$J_* \in C^1(\mathcal{O}_0)$ で，次が成り立つ．

$$J'_*(\mu) = \partial_M J(u(\mu), \mu) \ (\mu \in \mathcal{O}_0). \tag{1}$$

更にもし，$\mathcal{U}_0$ も開集合で，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$\partial_M J \in C^k(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0, M')$ 及び $u \in C^k(\mathcal{O}_0, X)$ であるならば，$J_* \in C^{k+1}(\mathcal{O}_0)$ が成り立つ．

注意 2.2. もし $\mathcal{U}_0$ が開集合で，$J \in C^1(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0)$ 及び $u \in C^1(\mathcal{O}_0, X)$ であるとすると，公式 (1) は次のように簡単に得られる．

$$J'_*(\mu) = D_\mu[J(u(\mu), \mu)] = \partial_X J(u(\mu), \mu)[u'(\mu)] + \partial_M J(u(\mu), \mu) = \partial_M J(u(\mu), \mu),$$

ここで D_μ は，$\mu \in M$ に関する Fréchet 微分を表す．最後の等式は，最小値を与える $u(\mu)$ において，$J(\cdot, \mu)$ の第一変分 $\partial_X J(u(\mu), \mu) \in X'$ が 0 であることから従う．

次の定理は，$\partial_X J(u, \mu) = 0$ に対する陰関数定理と，Lax-Milgram の定理から従う．

定理 2.3. X と M を実 Banach 空間とし，$\mathcal{U}$, $\mathcal{O}$ をそれぞれ X, M の開集合とする．$u_0 \in \mathcal{U}$ および $\mu_0 \in \mathcal{O}$ と汎関数 $J : \mathcal{U} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ について，次の条件を仮定する．

(1) $J(\cdot, \mu) \in C^2(\mathcal{U})$ $(\mu \in \mathcal{O})$ かつ $\partial_X J \in C^0(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$.
(2) $\partial_X J(u_0, \mu_0) = 0$.
(3) $\partial_X^2 J(w, \mu)$ は $(w, \mu) = (u_0, \mu_0)$ において連続.
(4) ある $\alpha > 0$ があって，$\partial_X^2 J(u_0, \mu_0)[w, w] \geq \alpha \|w\|_X^2$ $(w \in X)$ を満たす.

そのとき，(u_0, μ_0) の凸開近傍 $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{U} \times \mathcal{O}$ と，$u \in C^0(\mathcal{O}_0, \mathcal{U}_0)$ が存在し，$\mu \in \mathcal{O}_0$ に対し，次の 3 つの条件は同値になる．

a. $J(\cdot, \mu)$ は $w \in \mathcal{U}_0$ において極小値を取る．

b. $w \in \mathcal{U}_0$ は $\partial_X J(w, \mu) = 0$ を満たす．

c. $w = u(\mu)$.

更に，このとき，$J(\cdot, \mu)$ は $u(\mu)$ において $\mathcal{U}_0$ における最小値を取る．

定理 2.4. 定理 2.3 の条件のもとで，更に $\partial_X J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O}, X')$ がある $k \in \mathbb{N}$ について成り立つと仮定する．そのとき，$u \in C^k(\mathcal{O}_0, \mathcal{U}_0)$ である．

定理 2.5. 定理 2.3 の条件のもとで，更に，ある $k \in \mathbb{N}$ について $J \in C^k(\mathcal{U} \times \mathcal{O})$ であると仮定する． そのとき，$J_* \in C^k(\mathcal{O}_0)$ で，かつ (1) が成り立つ．

Lax-Milgram の定理から，定理 2.3 の条件のもとでは，$\partial_X^2 J(u(\mu), \mu)$ は X から X' への線形位相同型写像（すなわち，X から X' への全単射な有界線形作用素）とみなせることがわかるので，$\Lambda(\mu) \in B(X', X)$ をその逆写像として次をみたすように定義する．

$$\partial_X^2 J(u(\mu), \mu)[\Lambda(\mu)h, w] = h[w] \ ({}^\forall w \in X,\ {}^\forall h \in X').$$

この $\Lambda(\mu)$ は次節での楕円型偏微分方程式への応用においては，考えている境界条件のもとでの楕円型作用素の逆写像に相当する．

定理 2.6. 定理 2.4 で $k = 1$ としたとき，

$$u'(\mu) = -\Lambda(\mu) h_0(\mu) \ (\mu \in \mathcal{O}_0), \tag{2}$$

が成り立つ．但し，$h_0(\mu) := \partial_M \partial_X J(u(\mu), \mu) \in B(M, X')$ である．

3. エネルギー最小化問題とエネルギー解放率

以下，$\mathbb{R}^n$ の有界凸領域 Ω_0 $(n \geq 2)$ を一つ固定して，$W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n) \cong C^{0,1}(\overline{\Omega_0}, \mathbb{R}^n)$ に属する領域写像 φ について考える．また，$u \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対し，

$$|u|_{\mathrm{Lip}, \Omega_0} := \sup_{x, y \in \Omega_0, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|},$$

とおく．ここで，$\overline{\Omega} \subset \Omega_0$ を満たす開集合 Ω を一つ固定する．φ によるその変形 $\varphi(\Omega)$ を，以後 $\Omega(\varphi)$ と表すことにする．

$\mathbb{R}^n$ 上の恒等写像を $\varphi_0(x) = x$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ とおき，$W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ の開部分集合

$$\mathcal{O}(\Omega) := \left\{ \varphi \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n);\ |\varphi - \varphi_0|_{\mathrm{Lip}, \Omega_0} < 1,\ \overline{\Omega(\varphi)} \subset \Omega_0 \right\},$$

を定義しておく．以下，φ はこの $\mathcal{O}(\Omega)$ に属するものとする．縮小写像の原理から，φ は Ω_0 から $\varphi(\Omega_0)$ への bi-Lipschitz 変換になることがわかる．

また，Ω 上で定義された関数 v に対し，$\Omega(\varphi)$ 上の関数を $\varphi_* v := v \circ \varphi^{-1}$ によって定義する．この φ_* はいわゆる，φ に伴う押し出し作用素 (pushforward operator) である．φ に伴う Jacobi 行列や Jacobi 行列式を

$$\nabla \varphi^T(x) := \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) \right)_{i\downarrow, j\rightarrow} \in \mathbb{R}^{n \times n},\ (x \in \Omega_0),$$

$$A(\varphi) := \left(\nabla\varphi^T\right)^{-1} \in L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^{n\times n}),\ \kappa(\varphi) := \det\nabla\varphi^T \in L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}),$$

と定義すると，$\Omega(\varphi)$ 上の微分や積分の Ω への引き戻しは，次のように表現される．

(1) $$[\nabla(\varphi_* v)]\circ\varphi = A(\varphi)\nabla v \text{ a.e in } \Omega\ (v \in W^{1,1}(\Omega)),$$

(2) $$\int_{\Omega(\varphi)} (\varphi_* v)(y)dy = \int_\Omega v(x)\ \kappa(\varphi)(x)\ dx\ (v \in L^1(\Omega))$$

φ が C^1 級の場合によく知られたこれらの公式は，Lipschitz 級の φ についても成り立つ．例えば，[3] や [17] 等を参照のこと．

命題 3.1. 任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ に対し，次が成り立つ．
1. $\kappa \in C^\infty(W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n), L^\infty(\Omega_0))$ で，特に，$\kappa'(\varphi_0)[\mu] = \mathrm{div}\mu$ である．
2. $A \in C^\infty(\mathcal{O}(\Omega), L^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^{n\times n}))$ で，特に，$A'(\varphi_0)[\mu] = -\nabla\mu^T$ である．

写像 φ_* は $L^p(\Omega)$ から $L^p(\Omega(\varphi))$ への線形位相同型かつ，$W^{1,p}(\Omega)$ から $W^{1,p}(\Omega(\varphi))$ への線形位相同型になる．
記述の簡単のため，次の仮定をおく．より一般の状況への拡張性については，後の注意を参照のこと．$v \in H^1(\Omega(\varphi))$ を $\Omega(\varphi) \subset \mathbb{R}^n$ における状態を表す何らかのスカラー量とする．そのときの考えている系のエネルギーを

$$E(v, \Omega(\varphi)) := \int_{\Omega(\varphi)} W(x, v(x), \nabla v(x))dx,$$

とする．ここで，$W(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}$ は $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ について定義されたエネルギー密度関数とする．本稿では，煩雑さをさけるため，線形楕円型問題に対応する次の形に限ることとする（注意 3.3, 3.4 参照）．

(3) $$W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta^T B(\xi)\zeta + b(\xi)\eta^2\right) - f(\xi)\eta,$$

ここで，$B(\xi)$ は n 次対称行列（$\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ と表す）で，$B \in C^k(\Omega_0, \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})$ かつ，ある $\beta_0 > 0$ があって，

$$\zeta^T B(\xi)\zeta \geq \beta_0|\zeta|^2\ ({}^\forall\xi \in \Omega_0,\ {}^\forall\zeta \in \mathbb{R}^n),$$

を満たすものとする．ここで，k は 0 以上の整数とする．同様に，b は $b \in W^{k,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R})$ かつ $b(\xi) \geq 0$ (${}^\forall\xi \in \Omega_0$) を満たし，$f$ は $f \in W^{k,2}(\Omega_0, \mathbb{R})$ を満たすものとする．このエネルギーの最小化問題は，形式的に次の楕円型方程式に対応する．

$$-\mathrm{div}(B(x)\nabla u) + b(x)u = f(x) \text{ in } \Omega(\varphi).$$

このエネルギーの最小化問題を，次のような非斉次 Dirichlet 境界条件と斉次 Neumann 境界条件をもつ混合境界条件のもとで考える．
まず，Γ_D を摂動されていない領域 Ω の境界の空でない Lipschitz 連続な部分集合とする（いくつかの部分に分かれていても良い）．正確には有界なトレース作用素
$\gamma_0:\ H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_D)$ （但し，$R(\gamma_0) = \gamma_0(H^1(\Omega)) \neq \{0\}$ とする）が定義されていれば良い．$g \in H^1(\Omega)$ を一つ固定し，$v \in H^1(\Omega)$ に対する Γ_D 上の非斉次 Dirichlet 境界条件 $\gamma_0(v - g) = 0$ を考える．また，Ω の境界の Γ_D 以外の部分では，零 Neumann 境界条件（上記線形問題の場合は，$B\nabla u$ の法線成分が 0 に相当）が課されるものとする．
次に，摂動された領域 $\Omega(\varphi)$ における境界条件を述べる．Γ_D に対応する境界を
$\Gamma_D(\varphi) := \varphi(\Gamma_D)$ と書く．$H^1(\Omega(\varphi))$ から $L^2(\Gamma_D(\varphi))$ へのトレース作用素を γ_φ とするとき，$v \in H^1(\Omega(\varphi))$ に対する $\Gamma_D(\varphi)$ 上の非斉次 Dirichlet 境界条件 $\gamma_\varphi(v - \varphi_* g) = 0$ を考える．また，$\Omega(\varphi)$ の境界の $\Gamma_D(\varphi)$ 以外の部分では，同様に零 Neumann 境界条件が課されるものとする．

対応する $H^1(\Omega(\varphi))$ のアフィン部分空間は次のようになる．

$$\begin{aligned} V(\varphi,g) &:= \{v \in H^1(\Omega(\varphi));\ \gamma_\varphi(v-\varphi_* g)=0\} \\ &= \{v \in H^1(\Omega(\varphi));\ v=\varphi_* g \text{ on } \Gamma_D(\varphi)\}. \end{aligned}$$

ここで，$V(g)=V(\varphi_0,g)\subset H^1(\Omega)$ とおくとき，$\varphi_*(V(g))=V(\varphi,g)$ であることに注意しておく．摂動された領域における，次のエネルギー最小化問題を考える．

問題 3.2. 上記の仮定のもとで，$V(\varphi,g)$ において $E(\cdot,\Omega(\varphi))$ を最小にする $u(\varphi)\in V(\varphi,g)$ を求めよ．すなわち，

$$E(u(\varphi),\Omega(\varphi)) \le E(v,\Omega(\varphi)) \ ({}^\forall v \in V(\varphi,g)).$$

また，このとき，

$$E_*(\varphi) := \min_{v\in V(\varphi,g)} E(v,\Omega(\varphi)) = E(u(\varphi),\Omega(\varphi)),$$

と定義する．これは $\varphi\in\mathcal{O}(\Omega)\subset W^{1,\infty}(\Omega_0,\mathbb{R}^n)$ をパラメータとするパラメータ付き変分問題とみなせる．

ここで，Ohtsuka [8] による定式化についていくつか注意を述べておく．

注意 3.3. 弾性体の亀裂問題では通常，空間次元 $n=2$ または 3 で，n ベクトル値の変位場が状態を表す v に対応するが，[8] ではスカラー値の場合とベクトル値の場合では，以下の議論に本質的な差はないことが示されている．そのため，本論文では煩雑さを避けるため，単独楕円型方程式の場合について記述することとしたが，もちろん以下の結果は弾性体方程式を含むベクトル値の場合に容易に拡張可能である．

注意 3.4. [8] で扱われているように，W は必ずしも (3) のような線形問題に対応している必要はなく，半線形などある種の弱い非線形問題にも以下の議論は適用可能である．大雑把に言って，H^1 の枠組みで取り扱える非線形性ならば大丈夫だが，そのような W の満たすべき仮定をすべて書き連ねることは本稿では避け，[8] の取り扱いを参考に挙げるにとどめる．

注意 3.5. エネルギー解放率の計算において必要な仮想亀裂進展は，本論文の枠組みでは次のように取り扱われる．Ω_* を亀裂の入っていない領域とし，そこに初期亀裂 $\Sigma\subset\overline{\Omega_*}$ が入った領域を $\Omega:=\Omega_*\setminus\Sigma$ とする．$0\le t<T$ をパラメータとする滑らかな仮想亀裂進展 $\Sigma(t)$ を考える．ここで，$\Sigma(t)$ は閉集合とし，

$$\Sigma=\Sigma(0)\subset\Sigma(t_1)\subset\Sigma(t_2)\ (0\le^\forall t_1\le^\forall t_2<T),$$

である．$\varphi(t)\in\mathcal{O}(\Omega)$ を $\varphi(0)=\varphi_0$，$\varphi(t)(\Sigma)=\Sigma(t)$ かつ $\partial\Omega_*$ の近傍では $\varphi(t)(x)=x$ となるように取る．パラメータ t として特に，$t=\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma(t)\setminus\Sigma)$ となるように選ぶ．ここで，$\mathcal{H}^{n-1}$ は $n-1$ 次元 Hausdorff 測度を表す．仮想亀裂進展 $\{\Sigma(t)\}_{0\le t<T}$ に伴う，$t=0$ におけるエネルギー解放率 G は，E_* の φ に関する Fréchet 微分 E'_* を用いて，

$$G=E'_*(\varphi_0)[\dot\varphi(0)],$$

で与えられる．ここで，$\dot\varphi$ は t 微分を表し，$\dot\varphi(0)\in W^{1,\infty}(\Omega_0,\mathbb{R}^n)$ の台は亀裂先端部の小さな近傍に含まれるように出来る．そのような $\varphi(t)$ の構成については，やはり [8] を参照のこと．すなわち，エネルギー解放率を求めることは，E_* の Fréchet 微分 $E'_*(\varphi_0)$ を求めることに帰着される．

注意 3.6. また，[8] ではそこで提案されている枠組みが，亀裂進展問題だけではなく，他の領域変形や混合境界条件の摂動などへ，様々な応用を持つことが指摘されているが，それらの指摘は本稿へも直接当てはまる．

以下，W の ξ, η, ζ に関する微分をそれぞれ $\nabla_\xi W = (\frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial \xi_n})^T$, $W_\eta = \frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\nabla_\zeta W = (\frac{\partial W}{\partial \zeta_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial \zeta_n})^T$ と書く．更に，記述の簡略化のために，
$W(v(x)) = W(x, v(x), \nabla v(x))$,
$\nabla_\xi W(v(x)) = \nabla_\xi W(x, v(x), \nabla v(x))$ などと省略して表すこととする．今，

$$E_*(\varphi) = \min_{v \in V(\varphi, g)} E(v, \Omega(\varphi)) = \min_{v \in V(g)} E(\varphi_* v, \Omega(\varphi)) = \min_{w \in V(0)} E(\varphi_*(w+g), \Omega(\varphi)),$$

であることに注意する．$\mathcal{E}(w, \varphi) := E(\varphi_*(w+g), \Omega(\varphi))$ 及び $\mathcal{E}_*(\varphi) := \min_{w \in V(0)} \mathcal{E}(w, \varphi)$ とおくと，$\mathcal{E}_*(\varphi) = E_*(\varphi)$ である．また，変数変換公式から，

$$\begin{aligned} E(\varphi_* v, \Omega(\varphi)) &= \int_{\Omega(\varphi)} W(y,\ \varphi_* v(y),\ \nabla_y(\varphi_* v)(y)) dy \\ &= \int_\Omega W(\varphi(x),\ v(x),\ [A(\varphi)(x)] \nabla v(x)) \kappa(\varphi)(x) dx, \end{aligned} \tag{4}$$

であることがわかる．2 節で考えたパラメータ付き抽象的変分問題の枠組みを $X = V(0)$ 及び $M = W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ として，$J = \mathcal{E}$ に適用できる．例えば定理 2.1 が適用出来たとすると，公式 (1) は次の形になる．$u = u(\varphi_0)$ とおくと，任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\begin{aligned} E'_*(\varphi_0)[\mu] &= \mathcal{E}'_*(\varphi_0)[\mu] = \mathcal{E}_\varphi(u-g, \varphi_0)[\mu] \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{E}(u-g, \varphi_0 + \varepsilon\mu) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} E((\varphi_0 + \varepsilon\mu)_* u, \Omega(\varphi_0 + \varepsilon\mu)) \Big|_{\varepsilon=0}, \end{aligned}$$

である．こうして，(4) より，$E'_*(\varphi_0)$ は，任意の $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ に対し，

$$E'_*(\varphi_0)[\mu] = \int_\Omega \left(\nabla_\xi W(u) \cdot \mu - (\nabla_\zeta W(u))^T (\nabla \mu^T) \nabla u + W(u) \mathrm{div} \mu \right) dx, \tag{5}$$

と，領域積分によって表現される．この公式は，[8] によって得られたエネルギー解放率の領域積分表現と全く同じものである．
特に線形の場合，(3) とその後に述べた仮定から，定理 2.5 が適用でき，次の定理が得られる．

定理 3.7. W が (3) で与えられるとき，$k \in \mathbb{N}$ ならば，$\mathcal{E} \in C^k(V(0) \times \mathcal{O}(\Omega))$ 及び $E_* \in C^k(\mathcal{O}(\Omega))$ で公式 (5) が成り立つ．

References

[1] Berger, M. S., Nonlinearity and Functional Analysis. Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis, Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York-London, 1977.
[2] Cherepanov, G. P., On Crack propagation in continuous media, Prikl. Math. Mekh. Vol.31, No.3 (1967), 476-493.
[3] Evans, L. C. and Gariepy, R. F., Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
[4] Francfort, G. A. and Marigo, J.-J., Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, J. Mech. Phys. Solids, Vol.46 (1998), 1319-1342.
[5] Griffith, A. A., The phenomenon of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Royal Soc. London, A221 (1920), 163-198.
[6] Henry, D., Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer Verlag, 1981.
[7] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics I, Hiroshima Math. J., Vol.11 (1981), 21-52.

[8] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and its applications I – Basic theory –, Japan J. Appl. Math. Vol.2, No.2 (1985), 329-350.
[9] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics II, Hiroshima Math. J., Vol.16 (1986), 327-352.
[10] 大塚厚二, J 積分の一般化とその応用, 応用力学論文集, Vol.1, 土木学会, (1998), 35-44.
[11] Ohtsuka, K. and Khludnev, A., Generalized J-integral method for sensitivity analysis of static shape design, Control & Cybernetics, Vol.29 (2000), 513-533.
[12] 木村正人，若野功，亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析に関する再考察，日本応用数理学会論文誌, (to appear).
[13] Kimura, M. and Wakano, I., Parameter variation formulas and application to the energy release rate in crack extension, (in preparation).
[14] Rice, J. R., A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., Vol.35 (1968), 379-386.
[15] Wakano, I., Analysis for stress intensity factors in two dimensional elastisity, Proc. Japan Acad., Vol.73, Ser.A, No.5 (1997), 86-88.
[16] 若野 功, 二次元曲線亀裂の数学解析と数値解析, 日本応用数理学会論文誌, Vol.13, No.1 (2003), 59-80.
[17] W. P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions, Sobolev spaces and functions of bounded variation, Graduate Texts in Mathematics, 120, Springer-Verlag, New York (1989).

〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1
E-mail address: `masato@math.kyushu-u.ac.jp`