

退化準線型放物型方程式に対する正則性評価について

水野 将司 (東北大学大学院理学研究科 数学専攻)

本講演では N 次元開球 $B_R := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\}$, ($R > 0$) に対し, 次の非線型放物型方程式の初期値, 境界値問題

$$(NP) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{u}{\varepsilon} (|\nabla u|^2 - 1) = 0 & \text{in } (0, T) \times B_R \\ u = 0 & \text{on } (0, T) \times \partial B_R \\ u(0) = u_0 & \text{in } B_R \end{cases}$$

に対する正則性評価, 特に Harnack 不等式の導出について考える. ここで $\varepsilon > 0$ はパラメータである. (NP) の非負値解 u が与えられた時に

$$\sup_{(t_1, t_2) \times \Omega'} u \leq C \inf_{(t_3, t_4) \times \Omega'} u$$

なる不等式を Harnack 不等式という. ここで「 $\varepsilon, t_1, \dots, t_4$ や $\Omega' \subset\subset \Omega$ がどのような条件の下で得られるか?」や「定数 C が何に依存するか?」, さらには「定数 C は Ω' や $\varepsilon, t_1, \dots, t_4$ に対してどのような挙動をするか?」は応用上重要な問題になる. 特に Harnack 不等式から解の形状, 解の Hölder 連続性が示されるところは Harnack 不等式を研究する上で重要な結果である. 以下, C を Harnack 定数と呼ぶことにする.

(NP) は次の平均曲率流方程式記述する方程式の近似になっている.

$$(MMC) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{in } \Omega_T$$

(MMC) は主要部の最小固有値が消える方向を持っている, すなわち退化した方程式である. 一般には退化した方程式から Harnack 不等式は導けない. だが, 退化していても, Harnack 不等式が成り立つこともあるため (Evans [3], Lindqvist and Manfredi [5], Bhattacharya [2]), Harnack 方程式が成り立つかどうかを調べるためには個々の方程式を調べる必要がある. (NP) は $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることにより (MMC) を近似した方程式になっている. このことから (NP) に対して Harnack 不等式が成り立つかどうか, 特に Harnack 定数 C の $\varepsilon \rightarrow 0$ における挙動を調べることは (MMC) を解析する一つの手段であると考えられる.

退化していない線型の発散型放物型方程式に対し, Moser [6] は Harnack 不等式を示す方法を作った. Moser の方法は非線型方程式についても有効で Aronson and Serrin [1] や Trudinger [7] らによって, 準線型方程式に拡張されている. 今回, (NP) に対して Trudinger の手法を用いて次のような結果を得た.

定理 (Weak Harnack Inequality)

$N \geq 3$ に対して $0 \leq u \leq M$ を (NP) の解とする. この時 $\tau > 0$, $R' < R$ と $p < 0$ に対して, M のみに依存する定数 $\xi \geq M$ が存在して次の評価が成り立つ;

$$\inf_{(\tau, T) \times B_{R'}} u \geq C_1^{1/p} C_2 C_3 \|u\|_{L^p((0, T) \times B_R)},$$

ここで $C_1 > 0$ は N にのみ依る定数であり,

$$C_2 := \exp\left(-\frac{M\xi(N+2)}{2|p|\varepsilon}\right), \quad C_3 := \left(\frac{1}{(R-R')^2} + \frac{1}{\tau}\right)^{-(N+2)/2|p|}.$$

(NP) の非線型項である $u|\nabla u|^2$ は解の減衰をひきおこす項になっているので, Harnack の不等式の導出には $\inf u$ を下から持ち上げる評価が問題になってくる. 以下, 証明の概略として非線型項の処理の方法と, Iteration を与える不等式の導出について説明する. $b_0 := M/\varepsilon$ とし, η は適当な cut-off function とする. (NP) に $\phi := \eta^2 e^{-b_0 u} u^{p-1}$ をかけて Laplacian の項について部分積分する.

$$\nabla \phi = 2\eta e^{-b_0 u} u^{p-1} \nabla \eta + \eta^2 e^{-b_0 u} ((p-1)u^{-p-2} - b_0 u^{-p-1}) \nabla u$$

となり, $-\eta^2 e^{-b_0 u} b_0 u^{p-1} \nabla u$ の項によって, 非線型項 $u|\nabla u|^2$ の積分をキャンセルさせることができる. 従って

$$f(u) := |p| \int_u^\infty e^{-b_0 s} s^{-|p|-1} ds$$

とおくと, 局所 Energy 不等式

$$(1) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{|p|} \iint \partial_t (\eta^2 f(u)) dxdt + \frac{|p|+1}{2} e^{-b_0 M} \iint \eta^2 u^{-|p|-2} |\nabla u|^2 dxdt \\ & \leq \frac{2}{|p|+1} \iint u^{-|p|} |\nabla \eta|^2 dxdt + \frac{2}{|p|} \iint \eta |\partial_t \eta| u^{-|p|} dxdt. \end{aligned}$$

が得られる. $u^{-|p|}$ の可積分を上げるために次の補題を用いる.

補題 (Ladyženskaja の不等式) $N \geq 3$ に対し

$$\begin{aligned} V((0, T) \times \Omega) &:= L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \|u\|_{V((0, T) \times \Omega)} &:= \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \end{aligned}$$

とおくと, $u \in V((0, T) \times \Omega)$ に対し $u \in L^{2(N+2)/N}((0, T) \times \Omega)$ であり

$$\|u\|_{L^{2(N+2)/N}((0, T) \times \Omega)} \leq C \|u\|_{V((0, T) \times \Omega)}$$

が成り立つ. 但し, 定数 C は N にのみ依存する.

先の Energy 不等式 (1) と Ladyženskaja の不等式から $0 < \tau_0 < \tau_1 < \tau$, $R' < R_1 < R_0 < R$ に対して cut-off function を適当に選ぶことにより, 次の不等式が得られる.

$$\|u^{-|p|/2}\|_{L^{2(N+2)/N}((\tau_1, T) \times B_{R_1})}^2 \leq C e^{b_0 \xi \delta} \|u^{-|p|/2}\|_{L^2((\tau_0, T) \times B_{R_0})}^2.$$

但し C は N にのみ依る定数, δ は τ_0, τ_1, R_0, R_1 にのみ依る定数, ξ は M にのみ依る定数である. これにより積分範囲を狭めるかわりに $u^{-|p|/2}$ の可積分性を上げることができる. この不等式を繰り返し用いることで $\sup u^p$ を $\|u\|_p$ で評価することができる.

REFERENCES

- [1] D. G. Aronson and J. Serrin, Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations, Arch. Ration. Mech. Math. **25**(1967), 81-122
- [2] T. Bhattacharya, An elementary proof of the Harnack inequality for non-negative infinity-superharmonic functions, Electron. J. Differential Equations, **2001**(2001) No.44, 1-8
- [3] L. C. Evans, Estimates for smooth absolutely minimizing Lipschitz extensions, Electron. J. Differential Equations, **1993**(1993) No.3, 1-9
- [4] D. Gilberg and N. S. Trudinger, “*Elliptic partial differential equations of second order*”, Springer-Verlag, (2001) Reprint of the 1998 edition
- [5] P. Lindqvist and J. J. Manfredi, The Harnack inequality for ∞ -harmonic functions, Electron. J. Differential Equations, **1995**(1995) No.4, 1-5
- [6] J. Moser, A Harnack inequality for parabolic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **17**(1964), 101-134
- [7] N. S. Trudinger, Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math. **21**(1968), 205-226

E-mail address: sh5m16@math.tohoku.ac.jp