ASYMPTOTICS FOR VARIATIONAL PROBLEM WITH CRITICAL GROWTH AND SLIGHTLY POSITIVE DIRICHLET DATA

森山　繁 (首都大院理工学研究科)

$$\Omega \ : \ C^2 \text{ bounded domain in } \mathbf{R}^N, \quad N \geq 3, \quad p = \frac{N+2}{N-2}$$

上記の仮定の下で次の条件付き変分問題を考える。

$$\inf_{u \in A_{\gamma,\varepsilon}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \tag{1}$$

ここで

$$A_{\gamma,\varepsilon} = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ : \ u - \varepsilon \in H_0^1(\Omega), \ \gamma = \int_\Omega |u|^{p+1} \right\}, \ \varepsilon > 0$$

である。$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、(1) の positive minimizer $u = u_{\gamma,\varepsilon}$ が存在し、Euler-Lagrange 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{\gamma,\varepsilon} &= \lambda_{\gamma,\varepsilon} u_{\gamma,\varepsilon}^p \quad \text{in} \quad \Omega \\ \quad u_{\gamma,\varepsilon} &= \varepsilon \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

($\lambda_{\gamma,\varepsilon} > 0$) を満たすことが知られている (L.A.Caffarelli and J.Spruck [1])。 そこで γ を固定し、$\varepsilon \to 0$ としたときの $u_{\gamma,\varepsilon} = u_\varepsilon$ の挙動について考察する。$\Omega = B_R$ の場合には変分問題 (1) の extremal(球対称) は J.Li と M.Zhu の研究 [2] によって得られており、それを用いて直接的にアプローチできる。一般の有界領域に対しては次の結果を用いる。

Lemma 1. *For sufficiently small $\varepsilon > 0$,*

$$u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{-\frac{N-2}{4}} PU_{x_\varepsilon,\xi_\varepsilon} + w_\varepsilon + \varepsilon$$

holds, where $\alpha_\varepsilon, \ \xi_\varepsilon \in \boldsymbol{R}^+, \ x_\varepsilon \in \Omega$ with

$$\alpha_\varepsilon \to \alpha = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}, \quad \frac{\xi_\varepsilon}{d(x_\varepsilon, \partial\Omega)} \to 0,$$

$$x_\varepsilon \to x_0 \in \bar{\Omega}, \quad \lambda_{\gamma,\varepsilon} := \lambda_\varepsilon \to \frac{S_N}{\gamma^{2/N}}$$

as $\varepsilon \to 0$ and $w_\varepsilon \in E_{x_\varepsilon,\xi_\varepsilon}, \ w_\varepsilon \to 0$ in $H_0^1(\Omega)$.

ここで、$S_N = \pi N(N-2) \left[\frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)}\right]^{2/N}$ は $\mathbf{R}^N$ における Sobolev の不等式の最良定数であり、また $\xi > 0, \, a \in \Omega$ に対して $PU_{a,\xi}$ を

$$U_{a,\xi} = \left(\frac{\xi}{\xi^2 + |x-a|^2} \right)^{(N-2)/2} \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

の $H_0^1(\Omega)$ への projection とし,

$$E_{a,\xi} = \left\{ w \in H_0^1(\Omega) \middle| \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla PU_{a,\xi} = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{\partial}{\partial \xi} PU_{a,\xi} \right) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{\partial}{\partial a_i} PU_{a,\xi} \right) = 0 \right\}.$$

と定義する。これを用いて次の結果を得る。

Theorem 2. *Let $u_\varepsilon \in \mathcal{A}_{\gamma,\varepsilon}$ be a positive minimizer of (1), then we have* (*after passing to a subsequence*)

(1) *There exists $x_0 \in \Omega$ such that*

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} S_N \gamma^{\frac{N-2}{N}} \delta_{x_0} \quad \text{as } \varepsilon \to 0$$

in the sense of Radon measures.

(2) *The above x_0 is a maximum point of the (negative) Robin function R.*

(3) *We have a blow up rate of the L^∞-norm of u_ε as $\varepsilon \to 0$:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = \frac{[N(N-2)]^{N/2}}{N} \omega_N S_N^{-\frac{N-2}{2}} \gamma^{\frac{N-2}{N}} |R_0|,$$

where ω_N denotes the area of unit sphere in $\boldsymbol{R}^N$ and $R_0 = R(x_0)$ is a maximum value of $R(x)$.

References

[1] L.A.Caffarelli and J.Spruck.: Variational problems with critical Sobolev growth and positive Dirichlet data, Indiana Univ. Math. J. **39**, 1-18(1990).

[2] J.Li and M.Zhu.: Sharp Local Embedding Inequalities, Comm. Pure. Appl. Math. **1**, 122-144(2006).