半導体を記述するある流体力学モデルの解の漸近挙動について

松村　昭孝 (大阪大学大学院情報科学研究科), 村上　尊広 (大阪大基礎工 D1)

半導体内の電荷のキャリア (電子や正孔) の運動を記述する一次元モデルの１つとして, 次の流体力学モデルが知られている ('01,[1]):

$$(EQ)\qquad \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = \rho\phi_x - \dfrac{\rho u}{\tau}, \quad (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ \phi_{xx} = \rho - D. \end{cases}$$

ここに, 未知関数 (ρ, u, ϕ)=$(\rho, u, \phi)(x,t)$ はそれぞれ電荷密度 ($\rho > 0$), 電荷速度, 静電ポテンシャルを表し, D=$D(x)$ は $doping\ profile$ と呼ばれる与えられた背景の不純物の電荷密度である. また, P=$P(\rho)$ は圧力と密度の関係, $\tau = \tau(\rho, \rho u) > 0$ は緩和時間を表す関数で, ここでは $P(\rho) = \rho^\gamma (\gamma \geq 1), \tau = 1$ で与えられる. 方程式系 (Eq) に初期条件と Dirichlet 境界条件:

(1) 初期条件 $(\rho, u)(x,0) = (\rho_0, u_0)(x), \quad x \in (0,1),$

(2) 境界条件 $\rho(0,t) = \rho_1, \quad \rho(1,t) = \rho_2, \quad t \geq 0,$

(3) $\phi(0,t) = 0, \quad \phi(1,t) = \Phi_1, \quad t \geq 0,$

を課した初期値境界値問題については, Degond, Markowich('93,[2]) により亜音速の場合の定常解 $(\hat\rho, \hat u, \hat\phi)(x)$ の存在と一意性が考察され, また十分滑らかな時間大域解の漸近挙動については, この亜音速定常解の漸近安定性が, H.-L.Li, P.Markowich と M.Mei('03,[3]) によって考察されている. しかしながら, これらの漸近挙動の結果については各種データが小 $\big(|\rho_1 - \rho_2|, |\rho_0 - \rho_1|, |\Phi_1|, |D - \rho_1| \ll 1\big)$, つまり, 時間大域解がほとんど定数状態 $(\hat\rho, \hat u, \hat\phi)$ =$(\overline{\rho}, 0, 0)$ に近い場合 ($\overline{\rho} := \rho_1 = \rho_2$) の議論であり, 物理的・数学的にも興味深いデータの大きい時については, 何も答えていない. 本研究では, まずデータが大きい時の研究のために, Dirichlet 境界条件より少し扱いが容易な周期境界値問題で大きなデータについての漸近安定性を調べた. ここで, 周期境界値問題とは, 方程式系 (Eq) に初期条件と空間的に周期境界条件:

(4) 初期条件 $(\rho, u)(x,0) = (\rho_0, u_0)(x), \quad x \in R.$

(5) 境界条件 $(\rho, u, \phi)(x+1,t) = (\rho, u, \phi)(x,t), \quad x \in R, t \geq 0,$

を課した初期値境界値問題である. この初期値境界値問題 (Eq),(4), (5) において, 以下の条件

$$(6)\qquad \inf_{x\in R} D > 0, \quad \inf_{x\in R} \rho_0 > 0, \quad \int_0^1 \rho_0 dx = 1$$

の下に, 大域解の漸近挙動を調べ次の結果を得た.

≪**定理　(時間大域解の漸近挙動)**≫
初期値境界値問題 (Eq),(4),(5) の十分滑らかな時間大域解に対し以下が成立する.
) $\gamma \geq 2$ ならば, 正定数 ν,E_0 が存在して,

$$\int_0^1 \rho u^2 + (\rho - \hat{\rho})^2 + (\phi - \hat{\phi})_x^2 dx \leq E_0 \exp\{-\nu t\}, \quad t \geq 0.$$

) $2 > \gamma \geq 1$ のとき, $M := \sup_{x,t} \rho(x,t) < +\infty$ が成立するならば, 正定数 $\nu(M)$,$E_0(M)$ が存在して,

$$\int_0^1 \rho u^2 + (\rho - \hat{\rho})^2 + (\phi - \hat{\phi})_x^2 dx \leq E_0 \exp\{-\nu t\}, \quad t \geq 0.$$

上の結果は, 十分滑らかな時間大域解の存在を仮定したとき, 任意の初期値と $doping\ profile$ に対して, 時間大域解は対応する定常解との差が上記の意味で, 時間の経過に伴い指数的に 0 に減衰することを示したものである. しかしながら, 大域解の存在自体を示すには十分なアプリオリ評価となっていない. 一方, 任意の初期値に対する滑らかな時間大域解存在の問題は, $Dirichlet$ 境界条件において, ある初期値に対して導関数が有限時間に爆発することを証明している ('98,[4]) の結果を考えると否定的であることが予測される. そこで, 次に解の初期条件を強め, 任意の滑らかな定常解に対して, 初期値が定常解の近くに存在する場合の時間大域解の存在と漸近挙動を調べ, 次の結果を得た.

≪**定理　(定常解の漸近安定性)**≫
初期値 $(\rho_0, u_0) \in H^2$ 及び $doping\ profile D$ について条件 (6) の他, $D \in H^1$ を仮定する. このとき, ある定数 $\delta > 0, C > 0, \beta > 0$ が存在して, 次が成立する：$\|(\rho_0 - \hat{\rho}, u_0)\|_2 \leq \delta$ ならば, 初期値境界値問題 (Eq),(4),(5) は唯一の時間大域解 $\big(\rho, u) \in C^0([0,\infty); H^2\big) \cap C^1([0,\infty); H^1\big), \phi \in C^0([0,\infty); H^4) \cap C^1([0,\infty); H^3)$ を持ち,

$$\|(\rho - \hat{\rho}, u)(t)\|_2 + \|(\phi - \hat{\phi})(t)\|_4 \leq C\|(\rho_0 - \hat{\rho}, u_0)\|_2 \exp\{-\beta t\},$$

が成立する.

References

[1] A. Jüngel, Quasi-hydrodynamic semiconductor equations, Progress in Nonlinear Differential Equations,Birkhaüsser, 2001.
[2] P. Degond and P.A. Markowich, On a one-dimensional steady-state hydrodynamic model, Appl. Math. Lett, 3 (1990), 25-29.
[3] H.-L. Li, P.Markowich and M.Mei, Asymptotic behavior of solutions of the hydrodynamic model of semiconductors, Proc. Royal Soci. Edinburgh A 132 (2002) 359-378.
[4] G.-Q.Chen and D.Wang, Formation of singularities in compressible Euler-Poisson fluids with heat diffusion and damping relaxation,J.Differential Equations,144(1998),44-65.
[5] 非線形微分方程式の大域解 (圧縮性粘性流の数学解析), 松村昭孝・西原健二著, 日本評論者, 2004.
[6] Shinya Nishibata and Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of a stationary solution to a hydrodynamic model of semiconductors, to appear.

〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3 阪大基礎工数理教室