

## 多層からなる棒状媒体に対する非破壊検査の逆問題

永安聖, 中村玄 (北海道大学大学院理学研究院)

幾種類もの媒質が半直線のようにつながってできた棒状媒体を考える (図参照). 各媒質を伝わる波は1次元波動方程式で記述されているとする. そして, 半直線の端点付近の状況は直接観測できるけれども, 端点から遠いところの状況は直接は観測できないとする. このとき, この直接観測することができない情報を推測するために, 非破壊検査と呼ばれる次のような実験を行う: まず, 半直線の端点に人工的に衝撃を起こす. すると, この衝撃によって媒体内を波が伝わる. この波のうち, 端点に跳ね返ってくるものを観測し, この観測したデータから, 端点から遠いところの情報を具体的に再構成することを試みる.

さてここで, 記号を導入し, この問題を定式化する.  $h_0 := 0$  と置く. 各  $k = 1, \dots, N-1$  に対し,  $h_k$  を  $h_k > h_{k-1}$  を満たす正定数とする. 各  $k = 1, \dots, N-1$  に対し, 区間  $(h_{k-1}, h_k)$  を第  $k$  層と, 又, 区間  $(h_{N-1}, \infty)$  を第  $N$  層と呼ぶ. 各  $k = 1, \dots, N$  に対し,  $a_k, b_k$  を正定数とする.  $a_k$  は第  $k$  層を通る波の速度を表し,  $b_k$  は第  $k$  層のインピーダンスを表す. インピーダンスとは, 一言で言うと, 媒質の波を伝える能力を表すパラメータであり, 特に異なる媒質がつながっている場合の波の反射・透過を表す際に大きな役割を果たす. すると, この媒体内を伝わる波の伝播を記述する方程式は次のようになる (尚, 方程式の導出については, 例えば [1] を参照):

$$(W.k) \quad (\partial_t^2 - a_k^2 \partial_x^2)u(t, x) = 0, \quad \begin{array}{l} h_{k-1} < x < h_k \quad (k = 1, \dots, N-1), \\ x > h_{N-1} \quad (k = N), \end{array}$$

$$(O) \quad u(t, x) \equiv 0, \quad t < 0,$$

$$(B) \quad \partial_x u(t, x)|_{x=0+0} = \varphi(t) \quad (\text{但し, } \text{supp } \varphi \cap (-\infty, 0) = \emptyset),$$

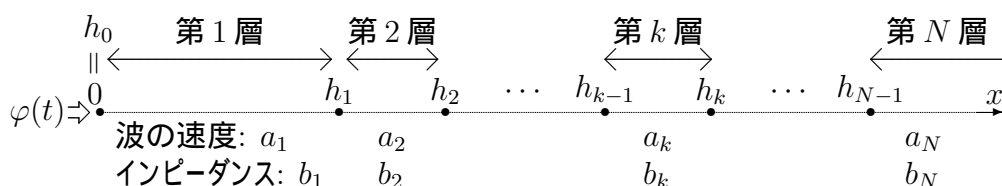
$$(I.k) \quad u(t, x)|_{x=h_{k-0}} = u(t, x)|_{x=h_{k+0}} \quad (k = 1, \dots, N-1),$$

$$(J.k) \quad a_k b_k \partial_x u(t, x)|_{x=h_{k-0}} = a_{k+1} b_{k+1} \partial_x u(t, x)|_{x=h_{k+0}} \quad (k = 1, \dots, N-1).$$

尚, 方程式 (I.k) は, 接合点  $x = h_k$  に於ける波の変位の連続性を, 又, 方程式 (J.k) は  $x = h_k$  に於ける応力の連続性を表している. そして, この定式化により, 初めに述べた問題の既知データ, 未知データは夫々

- ・ 既知データ:  $a_1, b_1, \varphi(t)$  (人工的な衝撃),  $u(t, 0)$  (観測データ),
- ・ 未知データ:  $N$  (層の数),  $a_k, b_k$  ( $k = 2, \dots, N$ ),  $h_k$  ( $k = 1, \dots, N-1$ )

となる. この問題は, 普通に「偏微分方程式を解く」のとは異なり, 「偏微分方程式の解の一部が与えられているときに, 方程式の係数等を決める」問題である. このような問題は逆問題と呼ばれている. これに対し, 係数が全て既知であるとして偏微分方程式の解の性質について議論する問題は順問題と呼ばれている. さて, 次の主結果は, 第1層の情報既知であるときに, 端点  $x = 0$  での時間  $T$  の間の観測データから, その観測時間の長さ  $T$  に応じて, 端点に近い方の層から, そのインピーダンス  $b_{k+1}$  及びその層の幅と波の速度と



の比  $(h_k - h_{k-1})/a_k$  が順々に再構成できる, ということを表している.

主結果.  $a_1, b_1$  は既知であるとする.  $b_j \neq b_{j+1}$  ( $j = 1, \dots, N-1$ ) とする.  $T > 0$  とする.  $\varphi \in L^1(-\infty, T)$  は  $\text{supp } \varphi \subset [0, T)$  を満たすとし, 更にある  $\varepsilon_0 > 0$  が存在して, 任意の  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  に対して  $\int_{-\infty}^{\varepsilon} \varphi(s) ds \neq 0$  が成立するとする. 観測データ  $v(t) := u(t, 0)$  が  $[0, T)$  上で与えられたとする. ここで,  $u(t, x)$  は方程式 (W.1)–(W.N), (O), (B), (I/J.1)–(I/J.N-1) の解を表す. このとき, 定数  $b_{k+1}, (h_k - h_{k-1})/a_k$  ( $1 \leq k \leq N_0 - 1$ ) が次の方法により再構成できる.

手順 1.  $v_1(t) := -a_1 \int_{-\infty}^t \varphi(s) ds - v(t)$  と置く.

手順  $k+1$  ( $k=1, 2, \dots$ ).  $[0, T)$  上  $v_k(t) \equiv 0$  ならば再構成終了, このときの  $k$  が上の  $N_0$  に対応する:  $v_{N_0}(t) \equiv 0$ . 一方,  $v_k(t) \not\equiv 0$  ならば, 次の手続きを実行する:

- $t_k := \inf \{t \in [0, T) : v_k(t) \neq 0\}$  と置く.
- 次のように  $(h_k - h_{k-1})/a_k, b_{k+1}$  を再構成:

$$\frac{h_k - h_{k-1}}{a_k} := \frac{t_k}{2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_j - h_{j-1}}{a_j},$$

$$b_{k+1} = \frac{2^{2k-1} a_1 \prod_{j=1}^{k-1} \frac{b_j b_{j+1}}{(b_j + b_{j+1})^2} - \lim_{t \rightarrow t_k+0} \frac{v_k(t)}{\int_{-\infty}^{t-t_k} \varphi(s) ds}}{2^{2k-1} a_1 \prod_{j=1}^{k-1} \frac{b_j b_{j+1}}{(b_j + b_{j+1})^2} + \lim_{t \rightarrow t_k+0} \frac{v_k(t)}{\int_{-\infty}^{t-t_k} \varphi(s) ds}} b_k.$$

- $v_{k+1}(t) := v_k(t) + g^{(k)} \left( t; a_1; b_1, \dots, b_{k+1}; \frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2 - h_1}{a_2}, \dots, \frac{h_k - h_{k-1}}{a_k}; T \right)$  と置

き, 次の手順に進む. ここで,  $g^{(k)}$  は,

$$g^{(k)} \left( t; a_1; b_1, \dots, b_{k+1}; \frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2 - h_1}{a_2}, \dots, \frac{h_k - h_{k-1}}{a_k}; T \right)$$

$$= -2a_1 \sum_{\substack{0 \leq m_l < \infty \ (1 \leq l \leq k), \\ \sum_{j=1}^k (m_j+1) \frac{h_j - h_{j-1}}{a_j} \leq \frac{T}{2}}} \psi_{k+1}(m_1, \dots, m_k; b_1, \dots, b_{k+1})$$

$$\times \int_{-\infty}^{t-2 \sum_{j=1}^k (m_j+1) \frac{h_j - h_{j-1}}{a_j}} \varphi(s) ds$$

という形をしており,  $\psi_{k+1}$  の明示的な表示も得られているが, ここでは割愛する ( $\psi_{k+1}$  の明示的な定義は [2] でなされている).

尚, 永安は, 実験の際の人工的な衝撃を, 端点から少し離れた第 1 層内部のある点でのデルタ関数とした場合の結果 [2] を得ていたが, 今回, その人工的な衝撃を真に端点で起こし, しかもその衝撃はデルタ関数に限らない, より一般の関数で記述される衝撃であったとしても, 1 回の実験により, 半直線の内部の情報を再構成することができたことにも注意しておく.

## REFERENCES

- [1] 長岡洋介, 振動と波, 裳華房, 1992.  
 [2] S. Nagayasu, *An inverse problem for the one-dimensional wave equation in multi-layer media*, preprint.