$L^p - L^q$ ESTIMATES FOR CAUCHY PROBLEMS OF LINEAR THERMOELASTIC WITH SECOND SOUND AND CLASSICAL THERMOELASTICITY IN 3-D

内藤　由香　(早大理工)

熱弾性体の運動において熱が有限伝播するように修正を加えた thermoelastic equation with 2nd sound と、修正前の calssical thermoelastic equation についての $L^p - L^q$ 評価を報告する。
次の方程式系を thermoelastic equation with 2nd sound という。

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla \mathrm{div}\ u + \beta\nabla\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \theta_t + \gamma \mathrm{div}\ q + \delta \mathrm{div}\ u_t = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \tau_0 q_t + q + \kappa\nabla\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x), \theta(0,x) = \theta_0(x), q(0,x) = q_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで、$\mu, \beta, \gamma, \kappa$ は正定数, λ は $\mu + 2\lambda > 0$ なる定数, τ_0 は正のパラメーターとする. この方程式系について Helmholtz 分解し, 次の方程式系に分けて考える.

$$\begin{cases} v_{tt} - \mu\Delta v = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ v(0,x) = v_0(x), v_t(0,x) = v_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_0 r_t + r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ r(0,x) = r_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_{tt} - \alpha\Delta\pi + \beta\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \theta_t + \gamma\Delta w + \delta\Delta\pi_t = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \tau_0 w_t + w + \kappa\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \pi(0,x) = f_1(x), \pi_t(0,x) = f_2(x), & \\ \theta(0,x) = f_3(x), w(0,x) = f_4(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

それぞれの方程式系について得られた解を $\mathbb{E}^1(t)\mathbb{F}, \mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}, \mathbb{E}^3(t)\mathbb{F}$ とおく.$\mathbb{E}^1(t)\mathbb{F}, \mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}$ についてはよく知られているので, $\mathbb{E}^3(t)\mathbb{F}$ についての定理を紹介する.

定理 1. $\mathbb{E}^3(t)\mathbb{F}$ は低周波部分と高周波部分に分解でき, それを

$$\mathbb{E}^3(t)\mathbb{F} = \mathbb{E}^3_0(t)\mathbb{F} + \mathbb{E}^3_\infty(t)\mathbb{F} = {}^t(\pi_0, \theta_0, \omega_0) + {}^t(\pi_\infty, \theta_\infty, \omega_\infty),$$

とおく. 更に, $\dot{\mathbb{E}}^3_0(t)\mathbb{F} = {}^t(\nabla^2\pi_0, \theta_0, \nabla\omega_0)$ とおくと, 次の評価が成り立つ.
(1) 任意の非不整数 m と 任意の *multi-index* $\beta \in \mathbb{N}^3_0$ に対し,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \dot{\mathbb{E}}^3_0(t)\mathbb{F}\|_p \le C(m,\beta,p,q) t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-(\frac{m+|\beta|}{2})} \|F\|_q \ \forall t \ge 1$$

$1 \le q \le 2 \le p \le \infty,$

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \mathbb{E}^3_0(t)\mathbb{F}\|_p \le C(m,\beta,p,q) \|\mathbb{F}\|_q \ 0 < \forall t \le 1,$$

$1 \leq q \leq p \leq \infty,\ (p,q) \neq (1,1),\ (\infty,\infty)$
(2) 任意の非不整数 m と 任意の *multi-index* $\beta \in \mathbb{N}_0^3$ に対し,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \pi_\infty\|_p \leq C(\beta,m)e^{-ct}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m),(|\beta|+m-1)^+,(|\beta|+m-2)^+,(|\beta|+m-1)^+}},$$
$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \theta_\infty\|_p \leq C(\beta,m)e^{-ct}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m+2),(|\beta|+m+1),(|\beta|+m),(|\beta|+m+1)}},$$
$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \omega_\infty\|_p \leq C(\beta,m)e^{-ct}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m+1),(|\beta|+m),(|\beta|+m-1)^+,(|\beta|+m)}},$$

$1 < p < \infty$.
ただし,$\mathbb{F} = {}^t(f_1,f_2,f_3,f_4)$ のとき $\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{k,l,m,n}(\mathbb{R}^3)} = \|f_1\|_{\mathbb{W}_p^k} + \|f_2\|_{\mathbb{W}_p^l} + \|f_3\|_{\mathbb{W}_p^m} + \|f_4\|_{\mathbb{W}_p^n}$, $(l)^+ = l$ *if* $l \geq 0$ $(l)^+ = 0$ *if* $l < 0$ とする.

thermoelastic equation with 2nd sound において $\tau_0 = 0$ として得られる方程式系:calssical thermoelastic equation についても同様に Helmholtz 分解し, 得られた解を $\mathbb{E}^1(t)\mathbb{F}, \mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}$ とおいて,$\mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}$ についての定理を紹介する.

定理 2. $\mathbb{E}^2(t)\mathbb{F}$ は低周波部分と高周波部分に分解でき, それを

$$\mathbb{E}^2(t)\mathbb{F} = \mathbb{E}_0^2(t)\mathbb{F} + \mathbb{E}_\infty^2(t)\mathbb{F} = {}^t(\pi_0,\theta_0) + {}^t(\pi_\infty,\theta_\infty),$$

とおく. 更に, $\dot{\mathbb{E}}_0^2(t)\mathbb{F} = {}^t(\nabla^2\pi_0,\theta_0)$ とおくと, 次の評価が成り立つ.
(1) 任意の非不整数 m と 任意の *multi-index* $\beta \in \mathbb{N}_0^3$ に対し,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \dot{\mathbb{E}}_0^2(t)\mathbb{F}\|_p \leq C(m,\beta,p,q)t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-(\frac{m+|\beta|}{2})}\|F\|_q\ \forall t \geq 1$$

$1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \mathbb{E}_0^2(t)\mathbb{F}\|_p \leq C(m,\beta,p,q)\|\mathbb{F}\|_q\ 0 < \forall t \leq 1,$$

$1 \leq q \leq p \leq \infty,\ (p,q) \neq (1,1),\ (\infty,\infty)$
(2) 任意の非不整数 m と 任意の *multi-index* $\beta \in \mathbb{N}_0^3$ に対し,

$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \pi_\infty\|_p \leq c(m,\beta,p,n)e^{-ct}\{t^{-\frac{n}{2}}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(2m+|\beta|-n)^+,(2m+|\beta|-n-2)^+,(2m+|\beta|-n-4)^+}}$$
$$+\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m),(|\beta|+m-1),(|\beta|+m-3)^+}}\},$$
$$\|\partial_t^m \partial_x^\beta \theta_\infty\|_p \leq c(m,\beta,p,n)e^{-ct}\{t^{-\frac{n}{2}}\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(2m+|\beta|-n)^+,(2m+|\beta|-n)^+,(2m+|\beta|-n)^+}}$$
$$+\|\mathbb{F}\|_{\mathbb{W}_p^{(|\beta|+m+1),(|\beta|+m),(|\alpha|+m-1)^+}}\},$$

$1 < p < \infty$.