走化性・増殖方程式とその有限要素近似系のグローバルアトラクタの次元評価

中口 悦史 (大阪大学大学院 情報科学研究科)

次の Mimura and Tsujikawa [5] による走化性・増殖方程式の一例を考える.

$$
\text{(CG)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\triangle u - \nu\nabla\cdot(u\nabla\rho) + fu^2(1-u) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = b\triangle\rho - c\rho + du & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \rho(x,0) = \rho_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}
$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界凸領域，パラメータ a, b, c, d, f, ν は正の実数である.

Aida et al. [1] による数値シミュレーションなどによって，走化性パラメータ ν が大きくなるにつれて，(CG) の解が形成するパターンはより複雑に，また種類も豊富になることが知られている．パターン形成過程の豊富さはグローバルアトラクタの構造の複雑さの現れである．しかし一方で，数値シミュレーションのために施された近似や離散化がパターン形成過程つまりアトラクタの構造に何も影響を及ぼさないという保証はない．この講演では，(CG) のグローバルアトラクタのフラクタル次元が ν の高々多項式オーダで増加すること，また，有限要素近似がこの増加度に影響しないことを示す.

方程式 (CG) の有限要素近似を以下のようにして与える．([7] を参照) $\{\tau_\xi\}_{\xi>0}$ を, $\xi = \max\{d_\sigma;\ \sigma\in\tau_\xi\} > 0$ を離散化パラメータとする，Ω の三角形分割の族とする．ただし σ は τ_ξ に属する三角形を，d_σ はその直径を表す．次の条件を仮定する.

(G): ある正数 ν があって ξ に一様に

$$\nu\xi \le \rho_\sigma \le d_\sigma \le r_\sigma \le \nu^{-1}\xi, \quad \sigma\in\tau_\xi,$$

が成立する．ただし r_σ と ρ_σ はそれぞれ三角形 σ の外接円と内接円の直径を表す.

有限要素関数の空間を

$$\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}) = \left\{ v\in\mathcal{C}(\overline{\Omega});\ \text{各 } \sigma\in\tau_\xi \text{ で } v|_\sigma \text{ は一次関数 } \right\}$$

と定義する．これは $L^2(\Omega)$ の閉部分空間と見なすことができるので，L^2-直交射影 $p_\xi : L^2(\Omega)\to\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ を定義することができる．作用素 $\triangle$ の $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ における近似 $\triangle_\xi$ は $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ 上の有界作用素として，次式で定義される：

$$\langle \triangle_\xi \hat{u}, \hat{v}\rangle_{L^2} = -\langle\nabla\hat{u}, \nabla\hat{v}\rangle_{L^2}, \quad \hat{u}, \hat{v}\in\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}).$$

よって，(CG) の近似系は次のように与えられる.

$$
(\mathrm{CG}_\xi)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} = a\triangle_\xi\hat{u} - \nu\chi_\xi(\hat{u})\hat{\rho} + fp_\xi\left[\hat{u}^2(1-\hat{u})\right] & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = b\triangle_\xi\hat{\rho} - c\hat{\rho} + d\hat{u} & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \hat{u}(x,0) = \hat{u}_0(x), \quad \hat{\rho}(x,0) = \hat{\rho}_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}
$$

この講演は Professor M. Efendiev (TU-Munich) と Professor W. L. Wendland (Uni. Stuttgart) との共同研究に基づくものである.

ここで $\chi_\xi(u)$ は $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ 上の有界作用素で，

$$\langle \chi_\xi(u)\hat{\rho}, \hat{v}\rangle_{L^2} = -\langle u\nabla\hat{\rho}, \nabla\hat{v}\rangle_{L^2}, \quad \hat{\rho}, \hat{v} \in \mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}),\ u \in L^2(\Omega),$$

で定義される．

既知の事実 [1, 7, 9] などから，(CG) のグローバルアトラクタ $\mathfrak{A}$ は $L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ の，(CG_ξ) のグローバルアトラクタ $\mathfrak{A}_\xi$ は $\mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_\xi(\overline{\Omega})$ の，それぞれコンパクト集合である．

主結果は以下の通りである．[3, 4, 6]

定理 1. 方程式 (CG) のグローバルアトラクタ $\mathfrak{A}$ のフラクタル次元は

$$C_1(\nu d)^1 \le \dim \mathfrak{A} \le C_2(\nu d)^6 \tag{1}$$

と評価される．ただし C_1 と C_2 は正の定数．

定理 2. 条件 (G) と，離散化パラメータ $\xi > 0$ が十分小さいことを仮定する．このとき，近似方程式 (CG_ξ) のグローバルアトラクタ $\mathfrak{A}_\xi$ のフラクタル次元は

$$C_1(\nu d)^1 \le \dim \mathfrak{A}_\xi \le C_2(\nu d)^6 \tag{2}$$

と評価される．ただし C_1 と C_2 は ξ に依存しない正の定数．

証明の概略． 上からの評価については，[2, §III.4] や [8, §V.3] にある volume contraction method を適用する：$\dim \mathfrak{A}$ の上界は，$q_N < 0$ を満たす最小の整数 N によって与えられる．ここで q_N は

$$q_N = \liminf_{T\to\infty} \sup_{U_0\in\mathfrak{A}} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Tr}_N(\mathcal{A}(S_tU_0))dt$$

で定義される．$\mathrm{Tr}_N(L)$ は作用素 L の N-次元トレース，作用素 $\mathcal{A}(S_tU_0)$ は (CG) の変化方程式の係数作用素で，(CG) の非線形半群 S_t の quasidifferential $W_t = S_t'(U_0)$ を生成するものとする．下界は (CG) の双曲型平衡点の不安定局所多様体の次元によって与えられる．詳しくは [1, 9] を参照のこと．$\dim \mathfrak{A}_\xi$ の上界と下界も全く同じ手順で得られる．

References

[1] M. Aida, T. Tsujikawa, M. Efendiev, A. Yagi and M. Mimura, Lower estimate of attractor dimension for chemotaxis growth system, *J. London Math. Soc.* (to appear).

[2] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, AMS, Providence, 2002.

[3] M. Efendiev and E. Nakaguchi, Upper and lower estimate of dimension of the global attractor for the chemotaxis-growth system: Part I, *Adv. Math. Sci. Appl.* (to appear).

[4] M. Efendiev and E. Nakaguchi, Upper and lower estimate of dimension of the global attractor for the chemotaxis-growth system II: two-dimensional case, *Adv. Math. Sci. Appl.* (to appear).

[5] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, *Physica A* **230** (1996) 499–543.

[6] E. Nakaguchi, Discretizations of chemotaxis-growth system and dimension estimate of their attractors, AIMS' Sixth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, University of Poitiers, Poitiers, France, June, 2006.

[7] E. Nakaguchi and A. Yagi, Fully discrete approximations by Galerkin Runge-Kutta method for quasilinear parabolic systems, *Hokkaido Math. J.* **31** (2002) 385–429.

[8] R. Temam, *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] 八木厚志, M. Efendiev, 辻川亨 and 三村昌泰, 走化性・増殖方程式に対するアトラクタ次元の下方評価, 日本数学会 2005 年秋季総合分科会函数解析学分科会講演, 岡山大学.

〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1

URL: `http://www-cocono.ist.osaka-u.ac.jp/~nakaguti/`

E-mail address: `nakaguti@ist.osaka-u.ac.jp`