ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH STARK POTENTIAL

中村能久 (熊本大学大学院　自然科学研究科　研究生)

本講演では次の Stark ポテンシャルのついた空間 1 次元における非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\text{(NLS)} \quad \begin{cases} i\partial_t u = -\dfrac{1}{2}\partial^2 u + V(x)u + F(u), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ここで $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial = \partial_x = \partial/\partial x$. 線形ポテンシャル V は次で与えられる (Stark ポテンシャル).

$$(1) \qquad V(x) = Ex \ ; \ E \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \ .$$

非線形項 $F(u) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 \bar{u}^3$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ である.

近年, ボーズ-アインシュタイン凝縮の発見に伴い, 線形ポテンシャル効果の入った非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) の研究が盛んになってきている. 興味深い事にポテンシャル効果の入った NLS の解はポテンシャル効果の入ってない NLS の解と異なる性質を示す事がある. 例えば調和振動子ポテンシャル ($V(x) = c|x|^2$) の場合, その効果により $V \equiv 0$ の場合には爆発が起こる非線形項に対して時間大域解が存在したり, 長距離散乱理論が必要な非線形項に対して短距離散乱理論が適用できたり等である (例えば [2, 3] 参照). ここでは $V(x)$ が空間に関して線形の場合 (1) を扱う. 線形散乱理論においては次の定理に基づき様々な結果が知られている (例えば [12] 参照).

定理 A (Avron and Herbst[1]). $H_E = -\frac{1}{2}\partial^2 + Ex$ とする. $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(2) \qquad U_E(t)f = e^{-itH_E}f = e^{-\frac{it^3}{6}|E|^2} e^{-itEx} e^{\frac{t^2}{2}E\partial} e^{-itH_0} f,$$

ここで $g \in L^2$, $a \in \mathbb{R}$ に対して $e^{a\partial}g(x) = g(x+a)$, また $H_0 = (-1/2)\partial^2$ である.

この定理を NLS に適用する事により解の存在等が示される ([4, 11] 参照). 今回得られた結果は (NLS) の初期値問題の解の漸近挙動に関するものである ($E = 0$ の場合は, 例えば [5, 6, 10] 参照. また終値問題に関しては, 例えば [7, 8, 9, 11] 参照).

定理 1. 非線形項 $F(u) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 \bar{u}^3$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ とする. $\frac{1}{2} < \gamma < 2$ に対して $u_0 \in H^\gamma \cap H^{1,\gamma}$ とし $\varepsilon = \|u_0\|_{H^\gamma \cap H^{1,\gamma}}$ は十分小さいと仮定する. このとき (NLS) の一意解 u が存在して次を満たす.

$$u \in C([0,\infty); H^\gamma \cap H^{0,\gamma}),$$
$$\|u(t)\|_{L^\infty} = C\varepsilon((1+t)^{-1/2}).$$

ただし $C > 0$. さらにこのとき一意の終状態 $u_+ \in L^2 \cap L^\infty$ が存在して, ある $d > 0$ に対して

$$\|\mathcal{F}U_E(-t)u(t) - u_+\|_{L^2\cap L^\infty} = O(t^{-d}), \ as \ t \to \infty,$$

が成り立つ.

注意 2. 証明においてはゲージ不変性のない非線形項を評価する事が重要である *Avron-Herbst* の公式 (2) により, 初期値問題 (NLS) の一意解 u には時間が大きくなると振動が生じてくる. よって非線形項が振動を伴った漸近挙動を示す。したがってこの振動に関して部分積分する事により必要な *decay* が得られ, (NLS) の解 u は漸近自由であるという事が証明される.

References

[1] J.E. Avron and I.W. Herbst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Commun. Math. Phys., **52** (1977), 239–254.

[2] R. Carles, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential*, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), no. 4, 757–772.

[3] R. Carles, *Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications*, SIAM J. Math. Anal., **35** (2003), no. 4, 823–843 .

[4] R. Carles and Y. Nakamura, *Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential* Hokkaido Math. J., **33** (2004), No. 3, 719–729.

[5] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to nonlinear Schrödinger equations and Hartree equations*, Amer. J. Math., **120** (1998), 369–389.

[6] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Large time behavior for the cubic nonlinear Schrödinger equations*, Canad. J. Math., **54** (2002), No. 5, 1065–1085.

[7] N. Hayashi, P.I. Naumkin, A. Shimomura and S. Tonegawa, *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in one and two space demension*, Electron. J. Differential Equations, **2004** (2004), No. 62, 1–16.

[8] Y. Kawahara, *Global existence and asymptotic behavior of small solutions to nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Differential Integral Equations **18** (2005), No. 2, 169–194.

[9] K. Moriyama, S. Tonegawa and Y. Tsutsumi, *Wave operators for the nonlinear Schrödinger equations with a nonlinearity of low degree in one or two space demension*, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), 983–986.

[10] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations, to appear.

[11] A. Shimomura and S. Tonegawa, *Remarks on long range scattering for nonlinear Schrödinger equations with Stark effects*, J. Math. Kyoto Univ., **45** (2005), No. 1, 205–216.

[12] 塩野入和彦, *Stark* 効果を持つ *2* 体 *Schrödinger* 作用素に対する散乱理論–新たな波動作用素の導入とその存在について–, 神戸大学 修士論文 (2003).