有界領域における GRAY-SCOTT モデルの定常解構造について

佐藤 典弘 (早稲田大学大学院理工学研究科)

次の Gray-Scott モデルの定常問題 (SP) に対して考察する.

$$\begin{aligned}
&\Delta u - uv^2 + \lambda(1-u) = 0 && \text{in} \quad \Omega, \\
&\gamma\Delta v + uv^2 - v = 0 && \text{in} \quad \Omega, \\
&\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 && \text{on } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

ただし, Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ $\mathbf{R^N}$ 内の有界領域であり, $\frac{\partial}{\partial n}$ は単位法線方向微分を表す. この問題に対して様々な観点から研究がなされてきたが, ここでは以下の問題について考える.

(I) 定常問題 (SP) に対する非自明解の非存在に関する λ と γ の十分条件を求める.

(II) 定常問題 (SP) に対する分岐構造はどのようになっているか？

問題 (I) に関する既知の結果はほとんどなかったが, 今回以下の定理を得ることができた.

Theorem 1. $\lambda \leq 4$ とする. そのとき, λ のみに依存するある正定数 $C_1(\lambda)$ が存在し, $\gamma \geq C_1(\lambda)$ を満たすならば, (SP) の解は定数のみである.

証明は [3] と同様な方針を用いる.

Theorem 2. $\lambda > 4$ かつ $\lambda\gamma \geq 1$ を仮定する. そのとき, λ と μ_1 のみに依存するある正定数 $C_2(\lambda, \mu_1)$ が存在して, $\gamma \geq C_2(\lambda, \mu_1)$ ならば, (SP) の解は定数のみである. ただし, μ_1 はノイマン境界条件下での $-\Delta$ の第 1 固有値である.

Theorem 1 と同様の方針で Theorem 2 を証明することは困難である. 証明のために以下の最大値原理が必要である.

Maximum Principle([1]) $g \in C(\bar{\Omega} \times R^1)$ を仮定する.
(i) $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ が

$$\Delta w(x) + g(x, w(x)) \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \mu} \leq 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

を満たし, $w(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} w$ とおくならば, $g(x_0, w(x_0)) \geq 0$ が成り立つ.
(ii) $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ が

$$\Delta w(x) + g(x, w(x)) \leq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \mu} \geq 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

を満たし, $w(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} w$ とするならば, $g(x_0, w(x_0)) \leq 0$ が成立する.

この最大値原理を用いて, 解のアプリオリ評価を得ることができる.

Lemma 3. (u, v) を (SP) の任意の解とする. そのとき,

$$0 < u(x) \leq 1, \quad v(x) \geq 0 \quad \text{for} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Lemma 4. $\lambda\gamma \geq 1$ を仮定する. (SP) の解 (u, v) について, 以下の不等式が成り立つ;

$$u(x) + \gamma v(x) \leq \lambda\gamma \quad \text{for} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Theorem 2 の証明の鍵となるのは, (u,v) を (SP) の解とした際に, v に関するポアンカレ不等式の逆のタイプの不等式を導くことである;

$$\gamma \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \leq C_3(\lambda) \int_\Omega (v-\bar{v})^2 dx.$$

ただし, $C_3(\lambda)$ は λ のみに依存する正定数, $\bar{v} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v dx$ である.

次に, 問題 (II) に対して考察する. 以下の定理が成り立つことが知られている.

Theorem MK([2]) $\lambda > 4$ とする. $\mu_n > 0\,(n=1,2,3\cdots)$ をノイマン境界条件における $-\Delta$ の第 n 固有値であるとし, $(u_s,v_s) = \left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2\lambda}, \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2}\right)$ と定める.

$$\gamma_n := \frac{\mu_n+\lambda-v_s^2}{\mu_n\,(\mu_n+\lambda+v_s^2)}, \tag{1}$$

とおくと, $\gamma=\gamma_n$ において (u_s,v_s) から非自明な解が分岐する.

Remark 5. (1) で定義した数列 $\{\gamma_n\}$ に関しては, (a)$\mu_1 \geq D(\lambda)$ のとき単調減少し 0 に収束する. また, (b)$\mu_1 < D(\lambda)$ のときは最初は単調増加するが, その後単調減少し 0 に収束する. ただし $D(\lambda) = \lambda - v_s^2 + v_s\sqrt{2\,(v_s^2-\lambda)}$ である.

γ が γ_n の近傍にあるとき, 解 $(u,v,\gamma) = (\Phi_n(\epsilon),\Psi_n(\epsilon),\gamma_n(\epsilon))$ は以下のように記述できる.

$$\begin{aligned} \Phi_n(\epsilon) &= u_s + \epsilon\left\{(a\phi_n)+u_*\right\}, \\ \Psi_n(\epsilon) &= v_s + \epsilon\left\{(b\phi_n)+v_*\right\}, \\ \gamma_n(\epsilon) &= \gamma_n + \epsilon\gamma'(0) + o(\epsilon). \end{aligned} \tag{2}$$

ただし, ϕ_n は μ_n に対応する第 n 固有関数を表し, u_* と v_* は $o(1)$ の関数である. また, a と b は

$$a^2+b^2=1, \quad v_s^2 a + (1-\gamma_n\mu_n)b = 0, \quad a<0<b, \tag{3}$$

を満たす定数である.

分岐の方向性に関しては今まで知られていなかったが, 今回以下のように特徴付けを行うことができた.

Theorem 6. $\lambda > 4$ を固定する. $(\Phi_n(\epsilon),\Psi_n(\epsilon),\gamma_n(\epsilon))$ を (2) で与えられる分岐解とする. そのとき,

$$\gamma'(0) = \frac{(d-c)(2v_s a + u_s b)\int_\Omega \phi_n^3 dx}{d\mu_n \int_\Omega \phi_n^2 dx}.$$

ただし, a と b は (3) で定義した定数であり, c と d は

$$c^2+d^2=1, \quad 2c+(\gamma_n\mu_n-1)d=0, \quad c<d,$$

を満たす正定数である.

Remark 7. $2v_s a + u_s b$ は $\mu_n > 3v_s^2 - \lambda$ のとき正であり, $\mu_n < 3v_s^2-\lambda$ のとき負である.

References

[1] Y. Lou, W. M. Ni, *Diffusion, Self-Diffusion and Cross-Diffusion*, J. Differential Equations **131**(1996), no.1, 79-131.

[2] J. S. McGough, K. Riley *Pattern formation in the Gray-Scott model*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **5**(2004), no.1, 105-121.

[3] N. Sato, *Some nonexistence results of stationary solutions for the Gray-Scott model*, Nonlinear Anal. **65**(2006), no.8, 1644-1653.