

多重井戸型ポテンシャルによる ALLEN–CAHN 型の方程式の特異極限について

大塚 岳 (東京大学大学院数理科学研究科 研究拠点形成特任研究員)

次の反応拡散方程式の特異極限について考える。

$$(1) \quad u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} f_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, T).$$

ここで f_ε は

$$(2) \quad f_\varepsilon(u) = -\sin u - \varepsilon a(1 + \cos u)$$

で与えられる関数であり、 a は定数とする。方程式 (1) は次のエネルギー汎関数

$$E_\varepsilon(\varphi) = \int \left(\frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} F_\varepsilon(\varphi) \right) dx$$

の L^2 勾配流として得られる方程式である。ここで $F_\varepsilon = \int f_\varepsilon = \cos u - \varepsilon a(u + \sin u)$ である。

非線形項が $f_\varepsilon(u) = 2u(u^2 - 1)$ であるとき、方程式 (1) は Allen–Cahn 方程式と呼ばれる。このとき $F_\varepsilon = (u^2 - 1)^2/2$ はふたつの極小点 $u = \pm 1$ を持つ。Allen–Cahn 方程式において、内部遷移層と呼ばれる解 u^ε の値が -1 から 1 へと移り変わる幅 $O(\varepsilon)$ の層が、 $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき平均曲率流方程式にしたがって動く界面に収束することが知られている。Rubinstein、Sternberg、Keller は漸近展開による形式的な計算でこの関係を示した ([RSK])。Chen は古典解の理論で、Evans、Soner、Souganidis は粘性解の理論で u^ε が 1 もしくは -1 に収束する点の集合について、平均曲率流方程式の解を用いた特徴づけを与えた ([C],[ESS])。ここでは Allen–Cahn 方程式の非線形項と同様の構造が多数見られる関数 (2) を導入する。エネルギー汎関数における $F_\varepsilon = \int f_\varepsilon$ は無数の極小点 $(2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$ を持つ。それゆえ複数の内部遷移層が得られることが予想される。本講演では (1) における複数の内部遷移層の挙動について考察する。

方程式 (1) において、初期値 $u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x)$ には

$$(3) \quad -\pi < u_0 < 3\pi, \quad \inf_{\mathbb{R}^N} u_0 < 0, \quad \sup_{\mathbb{R}^N} u_0 > 2\pi$$

を仮定する。これはもし $|u_0| < \pi$ とすると比較原理から $|u^\varepsilon| \leq \pi$ がしたがい、Allen–Cahn 方程式と本質的に同じ問題となるからである。仮定 (3) を課すと内部遷移層として解の値が $-\pi$ から π へ移り変わる層と、 π から 3π へと移り変わる層が得られる。形式的な漸近展開から駆動力項つきの平均曲率流方程式の等高線方程式

$$(4) \quad u_t - |\nabla u| \left\{ \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} + A \right\} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, T)$$

が導出される。ここで A は a にのみ依存する定数である。したがって (1) の内部遷移層は (4) にしたがって動く界面 $\{x; u(t, x) = z\}$ に収束すると考えられる。本講演の目標はこの予想を厳密に証明することである。

以下に本講演の主結果を述べる。なお本講演ではとくに断らない限り、解はすべて粘性解の意味で考える。

Theorem 1. 初期値 u_0 は有界かつ一様連続であり、(3) を仮定する。関数 u^ε 、 u はそれぞれ初期値を $u^\varepsilon(x, 0) = u(x, 0) = u_0(x)$ とする (1)、(4) の解とする。任意の $t \in [0, T]$ につ

いて、 $\{x; u(x, t) < 0\} \neq \emptyset$ 、 $\{x; u(x, t) \in (0, 2\pi)\} \neq \emptyset$ 、 $\{x; u(x, t) > 2\pi\} \neq \emptyset$ を仮定する。このとき任意のコンパクト集合 $K \in \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T]; u(x, t) < 2\pi k\}$ ($k = 0, 1$) について、

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_K u^\varepsilon \leq (2k - 1)\pi$$

が成り立つ。同様に任意のコンパクト集合 $K \in \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T]; u(x, t) > 2\pi k\}$ ($k = 0, 1$) について、

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_K u^\varepsilon \leq (2k + 1)\pi$$

が成り立つ。

証明の方針は [C] によるごく短時間での解 u^ε の挙動の評価と、[ESS] による収束の評価を行うための優解、劣解の構成からなる。この問題における本質的な困難は2つの種類の内部遷移層が同時に存在するため、[ESS] の方法により構成した解では π から 3π に移行変わる内部遷移層の下からの評価、および $-\pi$ から π に移行変わる内部遷移層の上からの評価が出来ないことである。[ESS] では優解を、進行波解の考察から得られる常微分方程式

$$(5) \quad -q_\varepsilon'' - c_\varepsilon q_\varepsilon' + f_\varepsilon(q_\varepsilon) = 0$$

の解と、界面からの符号つき距離関数から構成する。このとき、たとえば π から 3π に移行変わる内部遷移層を下から評価するためには $q_\varepsilon(-\infty) = -\pi$ 、 $q_\varepsilon(+\infty) = 3\pi$ をみたす (5) の解が必要になる。ところが一般にはこのような解は存在しない。この困難を解決するために、[ESS] の手法で $q_\varepsilon(\pm\infty) = \pm\pi$ なる (5) の解から得られた (1) の優解をふたつ用い、“積み上げる” ことによって通常の2倍の高さの層を持つ優解を構成する。この“積み上げ” を可能とした最大の要因は、 f_ε が周期的であることである。

REFERENCES

- [C] X. Chen, Generation and propagation of interface in reaction-diffusion equations, J. Differential Equations, 96(1992), 116–141
- [ESS] L. C. Evans, H. M. Soner and P. E. Souganidis, Phase transitions and generalized motion by mean curvature, Comm. Pure Appl. Math., 45(1992), 1097–1123
- [RSK] J. Rubinstein, P. Sternberg and J. B. Keller, Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), 116–133